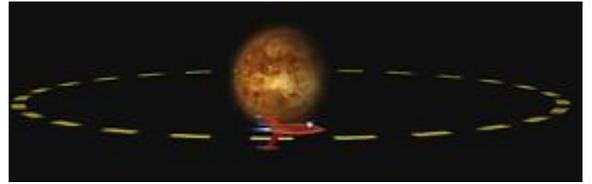


Una nave describe una órbita circular a gran velocidad alrededor de un determinado cuerpo celeste. ¿Cuánto vale en el sistema de referencia de la nave el cociente (C) entre la longitud (L) y el diámetro (D) de la órbita?

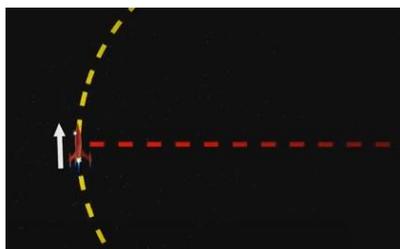


### Planteamiento

Para poder aplicar las leyes de la relatividad especial en el sistema de referencia de la nave tendría que ser dicho sistema de referencia inercial y no lo es porque la nave, como describe una órbita circular, tiene aceleración centrípeta o normal,  $\mathbf{a}_n$ . Como  $\mathbf{a}_n = v^2/R$  y queremos estudiar un caso en que la velocidad de la nave sea elevada, para poder considerar despreciable esta aceleración hemos de suponer que se trata de una órbita muy abierta (R muy grande).

En cuanto al cociente que pide el enunciado, para un observador inercial exterior, la longitud de la órbita que describe la nave es, como sabemos,  $L = \pi \cdot D$ , y, por tanto, dicho cociente es:  $C = L/D = \pi = 3.1416$ . La situación es diferente para los astronautas, porque se mueven recorriendo la órbita, cuya longitud quieren determinar y, en consecuencia, hay que considerar que esta longitud que pueden obtener es impropia y, por tanto, menor (ley de contracción de longitudes).

Así, por ejemplo, podemos imaginar que obtienen la longitud de la órbita completa sumando las de longitudes muy pequeñas (casi rectilíneas) en que dicha órbita se puede dividir. Cada una de estas longitudes se mueve con respecto a la nave y la atraviesa en sentido opuesto a su orientación (dibujo adjunto, debajo).



En cambio, el diámetro de la órbita es en cada punto perpendicular a la nave (dibujo adjunto, a la izquierda de este texto), y, por tanto, su valor es el mismo para los astronautas que para el observador exterior [Si se conoce el radio del cuerpo celeste, los astronautas podrían obtener este diámetro, por ejemplo, enviando una señal al cuerpo celeste y determinando el tiempo que tarda en ir y volver].

En consecuencia, se concluye que en el sistema de referencia de la nave, el valor del cociente C será menor que  $\pi$ .

### Hipótesis

Teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia es proporcional al diámetro, ambos factores se compensarán en el cálculo del cociente y, por tanto, cabe considerar que dicho cociente, C, dependa únicamente de la velocidad de la nave, v, o, más precisamente, del cociente entre dicha velocidad y la velocidad de la luz, c.

Más precisamente, cuanto menor sea v y/o mayor pudiera ser c, más próximos estaremos a poder aplicar la mecánica de Newton, de forma que en el caso extremo en que  $v/c \rightarrow 0$  (bien porque  $v=0$  o porque  $c \rightarrow \infty$ ) deberá ser  $C \rightarrow \pi$ .

En cambio, cuanto mayor sea v, mayor deberá ser la contracción de la longitud de la órbita y por tanto menor será el cociente, C. En el caso extremo en que  $v \rightarrow c$  tendría que ser  $C \rightarrow 0$ .

## Resolución

La longitud de la órbita que obtienen los astronautas en la nave,  $L_N$ , (impropia) es:

$$L_N = L_0/\gamma$$

Siendo:  $L_0$  la longitud propia de la órbita y el factor gamma:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

El diámetro de dicha órbita que obtienen los astronautas en la nave  $D_N = D_0$

Como  $L_0/D_0 = \pi$ , el cociente  $C$ , entre  $L_N$  y  $D_N$ , resulta:

$$C = \frac{L_N}{D_N} = \frac{L_0}{\gamma \cdot D_0} = \pi \cdot (1 - v^2/c^2)$$

*Comprobad que se cumplen las hipótesis enunciadas y todos los casos particulares considerados anteriormente.*

## Resultados cuantitativos

La discrepancia entre el resultado obtenido y el valor  $\pi$  es significativa en la medida en que el factor  $\gamma$  se separa de la unidad. Como sabemos, esto ocurre únicamente cuando la velocidad llega a ser comparable a la velocidad de la luz,  $c$ .

Obviamente, nuestras experiencias espaciales están absolutamente alejadas de estos órdenes de magnitud. Por ejemplo, la estación espacial internacional tiene una velocidad de traslación alrededor de la Tierra que no llega a los 8km/s (0.000027c), cuando la sonda New Horizons pasó por Plutón en 2017 su velocidad era próxima a su velocidad de exceso hiperbólica y apenas llego a unos 14km/s (0.000047c) y la nave espacial más rápida creada hasta ahora, que es la Voyager 1, podría alcanzar una velocidad de unos 17.5km/h (0.000057c). Obviamente en todos estos casos, el factor  $\gamma$  es prácticamente igual a la unidad y el resultado del cociente es simplemente  $\pi$ .

En la física de partículas, en cambio, si se manejan haces que realizan movimientos circulares a velocidades muy elevadas, no ya comparables a la velocidad  $c$ , sino muy próximas a ella. En el anillo del LHC, considerado como el “circuito más rápido del planeta”, los protones recorren viajan al 99.9999991% de la velocidad  $c$ . Es decir:

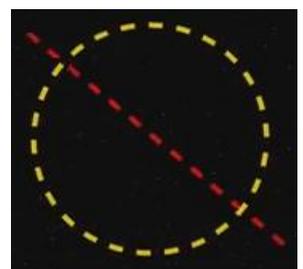
$$v=0.999999991c \rightarrow (v/c)^2 = 0.999999982$$

Y, por tanto, el valor del cociente  $C$  en su sistema de referencia es:

$$C = \pi \cdot \left(1 - v^2/c^2\right) = 1.8 \cdot 10^{-8} \cdot \pi = 0.0000000565$$

## Ampliación

Este ejercicio se puede utilizar a modo de experimento mental para tratar cualitativamente la curvatura del espacio-tiempo. Como en el sistema de referencia ligado al cuerpo que rota la longitud del diámetro se mantiene en el valor a que estamos acostumbrados y, en cambio, la longitud de la circunferencia disminuye, cuando se representan ambos en una superficie plana (dibujo adjunto) los extremos de dicho diámetro (de color rojo) no se pueden hacer coincidir con

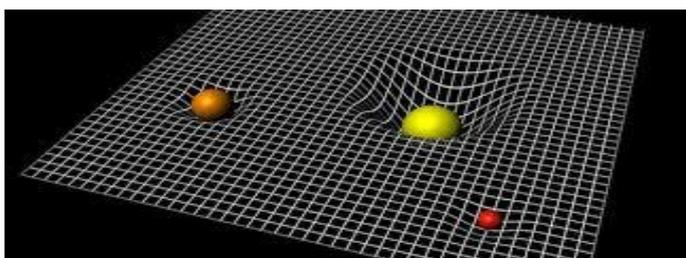
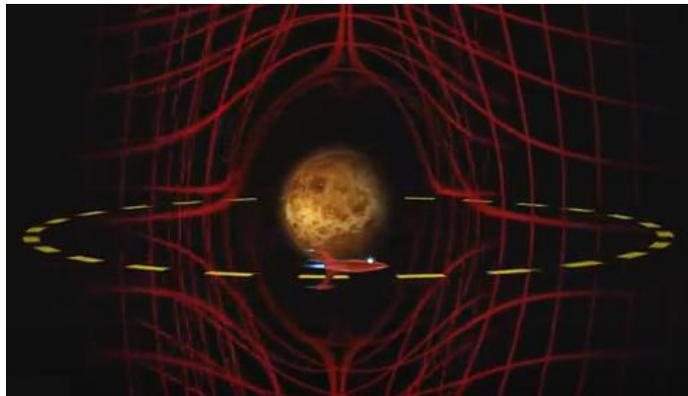


dos puntos opuestos de la circunferencia (de color amarillo), sino que la desbordan.



Si queremos realizar esa unión hemos de salirnos de la superficie plana y dibujar el diámetro como una línea curva (dibujo adjunto a la izquierda), con una curvatura que será tanto mayor cuanto mayor sea, en este ejemplo, la velocidad del movimiento circular de la nave.

Ahora bien, el sistema de referencia ligado a la nave tiene aceleración centrípeta,  $\mathbf{a}$ , dirigida hacia el interior de la circunferencia que dicha nave describe. Por tanto, de acuerdo con el principio de equivalencia de la relatividad general, es equivalente a un campo gravitatorio de intensidad  $g=-a$ , por tanto, dirigida hacia fuera. Todo campo gravitatorio curva el espacio-tiempo y éste lo hace del mismo modo que se produce la curva del mencionado diámetro (dibujo adjunto) Se concluye, por tanto que para un observador en rotación, el espacio-el espacio circundante es curvo, siendo su curvatura tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad de su movimiento.



Obsérvese que esta curvatura del espacio-tiempo es de sentido opuesto a la que se tiene alrededor de cualquier objeto celeste, producida por su gravedad (figura adjunta). Esto es así porque el campo gravitatorio del cuerpo celeste se orienta hacia él y, por tanto, tiene un sentido opuesto al campo gravitatorio equivalente al sistema de referencia de la nave en este problema.

**Nota:** Los dibujos incluidos en este problema, excepto el último (que es una imagen libre de Wikipedia), son capturas de imagen de un capítulo de la serie divulgativa “Quantum Fracture”, disponible en YouTube. (<https://www.youtube.com/watch?v=ESveYNa4DMk>).