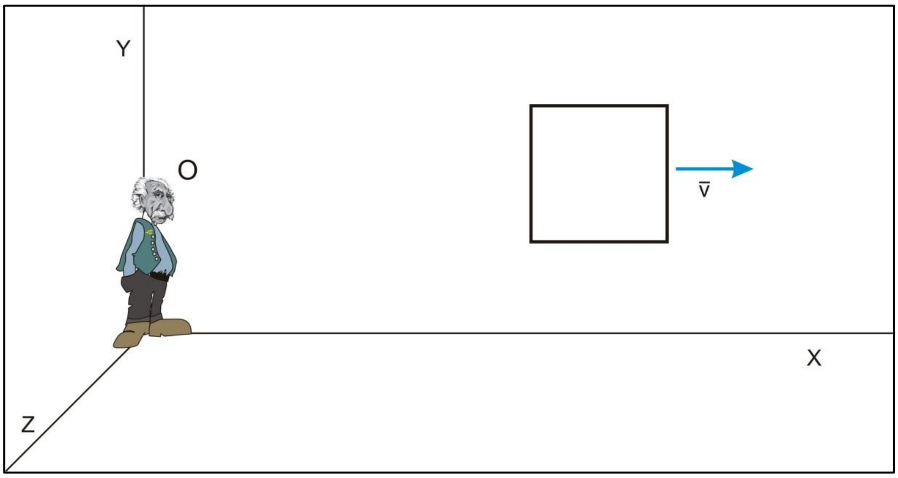
La longitud propia de cada uno de los lados de un cuadrado es “a”. ¿Cuánto valdrá su perímetro para un observador “O” situado en un sistema de referencia inercial que se aleja de dicho cuadrado a una velocidad constante y en dirección paralela a uno de sus lados?

Planteamiento



La situación planteada en el enunciado es totalmente equivalente a suponer que O se encuentra en reposo y es el cuadrado el que se aleja de él con velocidad constante, tal y como se representa en la figura ajunta. Para un hipotético observador ligado al cuadrado, cualquiera de sus lados estaría en reposo y, por tanto, su longitud sería una longitud propia y su perímetro valdría P’ = 4·a. Sin embargo, para el observador O, el cuadrado se encuentra en movimiento, por lo que las dos longitudes que se orientan en la misma dirección del movimiento (el eje X de la figura) se contraen, mientras que las que las otras dos que son perpendiculares al movimiento, no se alteran. Consecuentemente, para O el perímetro del cuadrado será menor que 4a.

Hipótesis y casos límite

Podemos suponer que, para el observador O, el perímetro (P) del cuadrado dependerá de la longitud propia (a) de cada uno de los cuatro lados, del valor absoluto (v) de la velocidad con que se aleja el cuadrado, y de la velocidad de la luz (c). Es decir: P = f(a, v, c)

Más precisamente, cabe pensar que, a igualdad de los restantes factores:

- ✓ Cuanto mayor sea la longitud propia de cada lado, a, mayor será el perímetro del cuadrado (y cuanto menor sea ésta, menor será dicho perímetro).
- ✓ Cuanto más grande sea v, mayor será la contracción de los dos lados paralelos al movimiento y, por tanto, menor será el perímetro correspondiente. Los dos casos límite que podemos plantear en relación con esta hipótesis son: Si $v \to 0$ el perímetro $P \to 4 \cdot a$, mientras que si $v \to c$ la contracción de las longitudes tenderá a ser máxima y el perímetro tenderá a reducirse y a ser suma de los otros dos lados ($P \to 2 \cdot a$).
- ✓ Finalmente, por lo que se refiere a la influencia que tendría que pudiera variar la velocidad de la luz, c, tenemos que cuanto mayor sea esta, mayor será también el perímetro, puesto que, lo que determina el resultado es el cociente entre la velocidad del cuadrado, v, y la velocidad de la luz, c, y este cociente es menor cuanto mayor sea c. Matemáticamente podríamos considerar dos casos límite: $c \to 0$ y $c \to \infty$. Pero desde el punto de vista de la Física, uno de ellos ($c \to 0$) es absurdo, ya que equivale a concebir un universo donde no se podría alcanzar ninguna velocidad (puesto que, como sabemos, ninguna velocidad puede superar a la de la luz) y en el que, por tanto, tampoco tendría sentido considerar que el cuadrado pudiera tener ninguna velocidad. El segundo ($c \to \infty$) implica volver a la mecánica de Newton, donde no existe un límite superior de velocidades y, en ese caso, el perímetro sería $P = 4 \cdot a$.

Resolución

La longitud de los dos lados que no se contraen es a, y (aplicando la ley de contracción de longitudes) la de los que sí lo hacen es a/γ. Por tanto, el perímetro vendrá dado por:

$$P = a + a + a/\gamma + a\cdot/\gamma \rightarrow P = 2\cdot a\,(1 + 1/\gamma)$$

Sustituyendo ahora el factor γ en la expresión de P, se obtiene finalmente:

$$P = 2\cdot a\left(1 + \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}\right)$$

Análisis del resultado

Podemos ver que se cumplen todas las hipótesis de partida y, en particular, que al sustituir en la expresión obtenida v = 0 y c→∞ se obtiene un perímetro $P=4\cdot a$. Ya hemos dicho que en el primer caso, al estar el cuadrado en reposo, no aparecen "efectos relativistas" diferenciados de las predicciones de la mecánica de Newton. En el segundo caso (c→∞) estamos planteando que no exista un límite superior de velocidad, lo que también equivale a volver a la mecánica newtoniana.

También se comprueba que, si hacemos v→c, se obtiene un perímetro P→2·a, es decir, una tendencia a que los lados paralelos a la dirección del movimiento se contraigan totalmente.

Finalmente decir, que se podría cometer el error de suponer que al hacer c→0 se obtenga P→∞. Es un error porque este resultado se obtendría únicamente bajo la suposición de que el cuadrado pudiera tener una velocidad, v, distinta de cero, en un universo con un límite superior de velocidades nulo (c=0). En realidad, debemos exigir que si c=0, también sea v=0 y, entonces, el resultado matemático es una indeterminación.