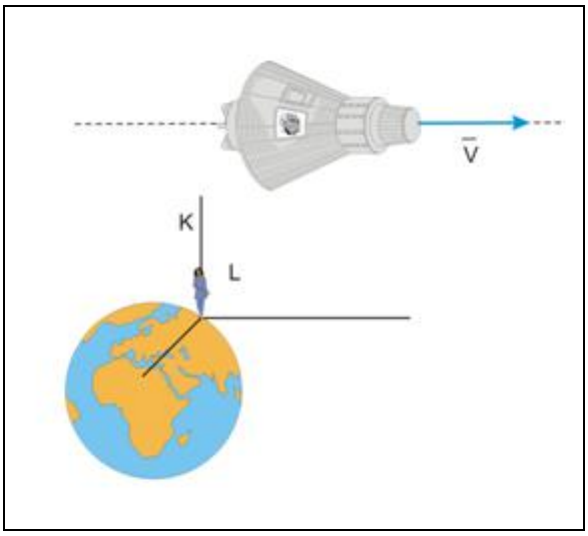
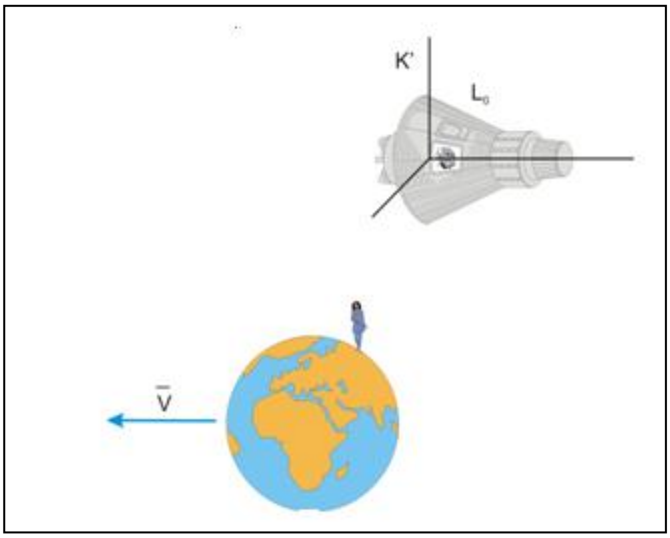
**Se determina por métodos ópticos la longitud de una nave espacial que pasa por las proximidades de la Tierra obteniendo un valor de 100 m. En contacto radiofónico los astronautas que viajan en la nave comunican que la longitud de su nave es de 120 m. Considerando Tierra y nave como sistemas de referencia inerciales, determinad la velocidad (módulo) con que la nave se desplaza respecto de la Tierra.**

## Planteamiento

La longitud de la nave, que se mide por métodos ópticos en un sistema de referencia, K, ligado a un punto de la superficie de Tierra, es una longitud en movimiento, L, ya que los extremos de dicha nave se desplazan con respecto cualquier observador terrestre situado en ese sistema de referencia, haciéndolo en la misma dirección en la que se orienta esa longitud (dibujo situado a la izquierda). En cambio, la longitud de la nave que miden los astronautas en un sistema de referencia, K', ligado a la nave, es su longitud propia, $L_0$, puesto que la nave está en reposo en dicho sistema de referencia (dibujo situado a la derecha) respecto al observador (cualquier astronauta dentro de la nave). Procede, por tanto, considerar la ley de la contracción de la longitud y tratar de calcular a partir de la misma, el valor de la velocidad buscado.




Para poder abordar el problema, impondremos dos condiciones que lo simplifican: En primer lugar, consideraremos despreciable la aceleración que tiene el punto de la Tierra en el que se sitúa el observador terrestre (debida al movimiento combinado de rotación de la Tierra respecto de su eje y de traslación respecto del Sol) y, en segundo lugar, supondremos que la nave se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme. Todo ello, al menos, durante el tiempo que duran las mediciones. De este modo, ambos sistemas de referencia (K y K') serían inerciales uno respecto del otro

## Hipótesis

Como el movimiento transcurre en una única dirección, podemos trabajar con la única componente del vector velocidad en dicha dirección (cuyo valor absoluto coincidirá con el módulo de dicha velocidad) a la que designaremos como "v".

Como es lógico, el valor de v dependerá de la longitud en movimiento de la nave, L, de su longitud propia, $L_0$, y de la velocidad de la luz, c. Más precisamente, cabe esperar que:

Cuanto mayor sea el cociente entre L y $L_0$, mayor ha de ser la velocidad de la nave. En el caso límite en que dicho cociente tienda a infinito ($L/L_0 \to \infty$) la velocidad, v, debería tender hacia al límite superior de velocidades, c ($v \to c$). En el caso límite opuesto, es decir, si $L/L_0 \to 1$, estamos planteando que no haya contracción de la longitud, lo que sólo puede ocurrir si la nave está en reposo ($v \to 0$).

En cuanto a la influencia de la velocidad de la luz, c, en un hipotético universo en el que c tuviese un valor más alto, mayor podría ser la velocidad de la nave para un determinado valor del cociente entre su longitud en movimiento y propia.

**Resolución**

Primero escribimos la ley de la contracción de la longitud aplicada a este caso: $L = L_0/\gamma$

Sustituyendo en la expresión anterior el factor gamma, se obtiene: $L = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última ecuación y despejando v, se llega finalmente a:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_0}\right)^2}$$

Sustituyendo ahora los valores numéricos, se obtiene v = 0’4c. Es decir, si la discrepancia entre las longitudes de la nave, implica una contracción del 16’7 %, la velocidad a la que está viajando dicha nave un 40% de la velocidad de la luz.

**Análisis del resultado**

*Comprobad que, además de obtener una ecuación dimensionalmente homogénea (mismas dimensiones a izquierda y derecha de la igualdad), en el resultado literal anterior se cumplen todas las hipótesis y casos límite que hemos planteado.*

Resulta instructivo ahora añadir en el análisis una pequeña reflexión acerca de qué ocurre con el resultado si hacemos tender la velocidad de la luz, c, hacia infinito. En efecto, a partir del resultado podríamos tener la tentación de pensar que al hacer $c=\infty$ obtendremos también $v=\infty$. Este razonamiento es erróneo ya que no estaría teniendo en cuenta que hacer $c=\infty$ significa que la nave, en principio, podría alcanzar cualquier velocidad, ya que ello equivale a ubicar el problema en el marco de la mecánica de Newton, donde es preciso considerar que además de no existir un límite superior de velocidades, también ocurre que las longitudes son absolutas. Por tanto, en este caso, si hacemos $c=\infty$ también debemos hacer $L=L_0$ con lo que el resultado resulta una indeterminación:

$$\text{Si } v = \infty \to L = L_0 \to v = 0 \cdot \infty \text{ (indeterminación)}$$

La velocidad quedaría indeterminada. Su valor podría ser cualquiera, con independencia de qué longitud tenga la nave, una longitud que, por otra parte, es absoluta, es decir, es este caso es la misma para los astronautas y para los observadores terrestres.

**Nuevas preguntas**

*¿A qué velocidad tendría que viajar la nave considerada en este problema para que la diferencia entre las longitudes fuese tan solo de 8 cm?*

Sustituyendo y operando se obtiene v = 0’04c. Es decir, debería moverse a una velocidad 10 veces menor que la anteriormente calculada. Aun así, esa velocidad es de $12 \cdot 10^6$ m/s, lo que equivale a 43,200,000 km/h.