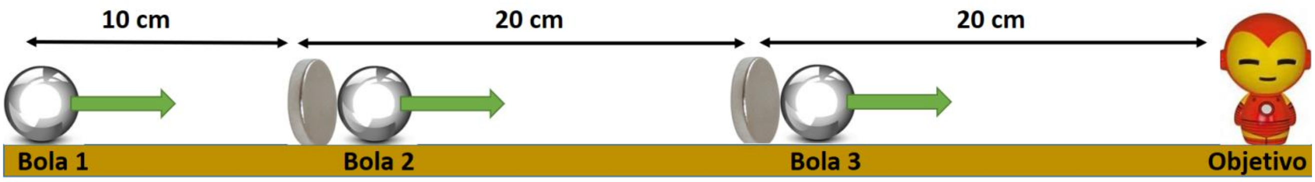
Pistola magnética. Problema

Se construye una “pistola magnética” que consta de dos imanes, es decir, habrá dos tramos de aceleración. La disposición del sistema se muestra en la siguiente figura. En ella puede verse que la primera bola estrá separada del primer imán 10 cm, la segunda 20 cm y la tercera, que ya actúa como proyectil, se seprar del objetivo otros 20 cm.



Suponemos que a distancias tan cortas la fuerza con la que el imán atrae a las bolas de metal, de 20 g, es constante e igual a 4 N (en realidad esta F aumenta conforme la distancia bola-imán disminuye, es decir, cada vez es atrída con más fuerza). Calculad la velocidad, en km/h, con la que sale disparado el objetivo, que pesa 40 g. (Dato: Suponed que todos los choques son elásticos y que, cuando las bolas chocan con el imán correspondiente terminan en reposo y la transferencia de momento es total de un objeto al siguiente)

Resolución:

Según la segunda ley de Newton, toda fuerza neta no nula provoca una aceleración sobre un objeto, en la misma dirección, siguiendo la relación:

$$F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{4\ N}{0.02\ kg} = 200\ \frac{m}{s^2}$$

Se resuelve el problema por tramos. Todas las bolas seguirán movimientos rectilíneos uniformemente acelerados, con condiciones iniciales diferentes en cada caso pero con una aceleración de, en este caso, 200 $\frac{m}{s^2}$. Las ecuaciones de este movimiento son:

$$v_f = v_i + a \cdot t$$

$$s_f = s_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Así, la primera bola tiene una velocidad inicial $v_i = 0\ m/s$ y recorre $s_f = 0.1\ m$. Con estos datos se calcula en primer lugar el tiempo que tarda en recorrer ese espacio y, con ese dato, la velocidad que adquiere.

$$s_f = s_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0\ m + 0 \frac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot\ 200\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2 = 0.1\ m$$

Así, despejando t se tiene:

$$t = \sqrt{\frac{2\ \cdot\ 0.1\ m}{200\ \frac{m}{s^2}}} = 0.032\ s$$

Con este tiempo, la velocidad final de la bola sería:

$$v_f = v_i + a \cdot t = 0 \frac{m}{s} + 200\ \frac{m}{s^2} \cdot 0.032\ s = 6.4\ m/s$$

El mismo procedimiento se debe seguir para la segunda y tercera bola, pero teniendo ahora en cuenta que la velocidad inicial de cada una es la final de la anterior.

Para la segunda bola se tiene una velocidad inicial $v_i = 6.4\ m/s$ y recorre $s_f = 0.2\ m$. La primera ecuación para calcular el tiempo quedaría:

$$0\ m + 6.4\frac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot\ 200\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2 = 0.2\ m$$

Despejando t con la formula conocida para una ecuación de segundo orden se calcula:

$$100 \cdot t^2 + 6.4\ \cdot t - 0.2 = 0$$

$$t = \frac{-6.4\ \mp\ \sqrt{6.4^2\ - 4\ \cdot 100\ \cdot (-0.2)}}{2\ \cdot (100)} = \frac{-6.4\ \mp\ 11}{200}$$

La solución negativa carece de sentido, por lo que el tiempo será:

$$t = \frac{-6.4 +\ 11}{200} = 0.023\ s$$

Así, la velocidad final se calcula:

$$v_f =\ v_i + a\ \cdot t = 6.4\frac{m}{s} +\ 200\ \frac{m}{s^2}\ \cdot 0.023\ s = 11\ m/s$$

Se pasa ya a la tercera y última bola, que tendrá una velocidad inicial $v_i = 11\ m/s$ y recorre $s_f = 0.2\ m$. Al no haber imán ESTA BOLA NO SUFRE NINGUNA FUERZA Y POR TANTO NO SE ACELERA MÁS. Por lo que:

$$v_f =\ v_i = 11\ m/s$$

Esta es la bola que colisiona con el objetivo. Por conservación del momento lineal, p, ha de ocurrir que:

$$p_{bola} =\ p_{objetivo}$$

$$m_{bola} \cdot\ v_{bola} =\ m_{objetivo}\ \cdot\ v_{objetivo}$$

$$v_{objetivo} = \frac{m_{bola} \cdot\ v_{bola}}{m_{objetivo}} = \frac{20\ g\ \cdot 11\frac{m}{s}}{40\ g} = 5.5\ m/s$$

El enunciado pide calcularlo en km/h, que sería:

$$v\left(\frac{km}{h}\right) = \frac{5.5\frac{m}{s} \cdot 3600}{1000} = 19.8\ km/h$$