¿CUÁL ES EL PERIODO DE UN OSCILADOR?

Manuel Alonso Sánchez. manuelalonso@inicia.es
Jaime Carrascosa Alís. jaime.carrascosa@uv.es
Juan José Ruíz Ruíz. juanjoruiz124@gmail.com

Comenzaremos en primer lugar por analizar qué interés puede tener este problema:

1. Consideración del posible interés de la situación planteada

A.1. *¿Cuál puede ser el interés de un problema como el que aquí se plantea?*

Los movimientos vibratorios u oscilatorios son muy frecuentes y los estudiantes conocen bastantes ejemplos de objetos sujetos a este tipo de movimientos, como péndulos, muelles, instrumentos musicales, etc. También conocen algunos fenómenos naturales relacionados con la oscilación de distintos materiales como, por ejemplo, los terremotos o las ondas sonoras.

El estudio de este tipo de movimientos es particularmente interesante, ya que permite describir las vibraciones de los materiales llamados elásticos y tiene numerosas aplicaciones que van, desde la investigación acerca de los enlaces que mantienen unidos a los átomos y moléculas, a la construcción de puentes y grandes edificios o a la determinación de la intensidad del campo gravitatorio en un lugar determinado. Además, muchas de las magnitudes y ecuaciones que se utilizan para estudiar el movimiento de cuerpos u objetos que vibran sirven también para describir la propagación de ondas, tanto mecánicas (transmisión de la vibración de una fuente a través de las partículas materiales de un medio elástico) como electromagnéticas (transmisión de un campo electromagnético oscilante).

2. Planteamiento preciso del problema

Con objeto de precisar el problema, comenzaremos planteando qué se entiende por un oscilador y luego elegiremos uno sencillo, sobre el que investigar de qué factores dependerá su periodo. Los alumnos saben que esta magnitud (el periodo o tiempo que tarda en realizar una oscilación completa) es una característica fundamental de todo cuerpo que oscila. El problema será averiguar de qué factores depende y cómo lo hace. Naturalmente, dicho periodo será distinto según el tipo de oscilador de que se trate. Por tanto, para comenzar, conviene simplificar el problema, eligiendo un tipo de oscilador adecuado, cuyo estudio pueda ser abordable mediante experiencias sencillas, realizables en un laboratorio escolar.

A.2. *Describid con la mayor precisión posible el tipo de oscilador más simple que se conciba, para facilitar así un primer estudio como el que aquí se pretende.*

Entre los ejemplos que se han mencionado en la actividad A.1, elegimos un péndulo, formado por un pequeño objeto pesado (por ejemplo, una bola de acero) suspendido de un hilo que prácticamente no se alargue. Es fácil así aproximarse a la idea de péndulo simple: masa considerada puntual que cuelga de un hilo sin torsión, inextensible y de masa despreciable, sujeto por un único punto, y sin que haya fricción. Un péndulo de estas características oscilaría siempre en un mismo plano y parece un objeto idóneo para la investigación porque se construye fácilmente y permite un control sencillo de las variables que pueden influir en el periodo.

Por tanto, los alumnos acotan el problema en los siguientes términos:

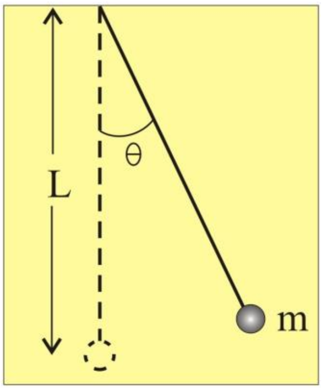
Estudiar qué factores pueden influir en el periodo de un péndulo simple y cómo tiene lugar esa influencia.

3. Emisión de hipótesis

A.3. *Señalad, a título de hipótesis, de qué factores cabe suponer que dependa el período T de un péndulo simple y cómo cabe esperar que influya cada uno de ellos.*

Los factores en que se piensa habitualmente son la longitud del péndulo L, el peso de la bola (m·g) y la amplitud de las oscilaciones (que puede medirse por el ángulo θ que forma el hilo con la vertical). Es posible establecer así como hipótesis que:

$$T = f\,(L, m, g, \theta)$$



Respecto a cómo influyen dichos factores en el valor del periodo, los argumentos pueden variar algo, dependiendo del nivel educativo. En términos generales, suele haber una mayoría de alumnos que piensa que, a igualdad de los restantes factores, cuanto mayor sea la longitud, mayor será el periodo, argumentando que una mayor longitud implica también un recorrido mayor en cada oscilación. No obstante, en cuanto al resto de magnitudes no existe el mismo grado de consenso, produciéndose a menudo algunas discrepancias. Así, algunos piensan que a mayor ángulo de oscilación, mayor será el periodo y lo suelen argumentar diciendo que un ángulo mayor implica que la longitud recorrida por la bolita también será mayor, mientras que otros no lo tienen tan claro y señalan que a mayor ángulo también la bolita irá más rápida. Respecto a la masa, ocurre algo parecido, algunos piensan que cuanto mayor sea la masa, más pesará la bolita y asocian este mayor peso a bajar más rápido, lo que les lleva a pensar que el periodo será tanto menor cuanto mayor sea la masa, pero también hay otros que señalan que si bien puede ser que baje más rápido, también subirá luego más lentamente… En cualquier caso, conviene recoger todas las hipótesis (sin descartar de entrada ninguna), antes de elaborar posibles diseños con los que contrastarlas.

4. Elaboración de diseños experimentales

A continuación vamos a comentar dos posibles diseños que se pueden utilizar para contrastar las hipótesis enunciadas anteriormente: uno más tradicional, basado en la utilización de cronómetros para medir el tiempo y otro, un poco más sofisticado, basado en la utilización de un sensor de fuerza y los programas informáticos adecuados.

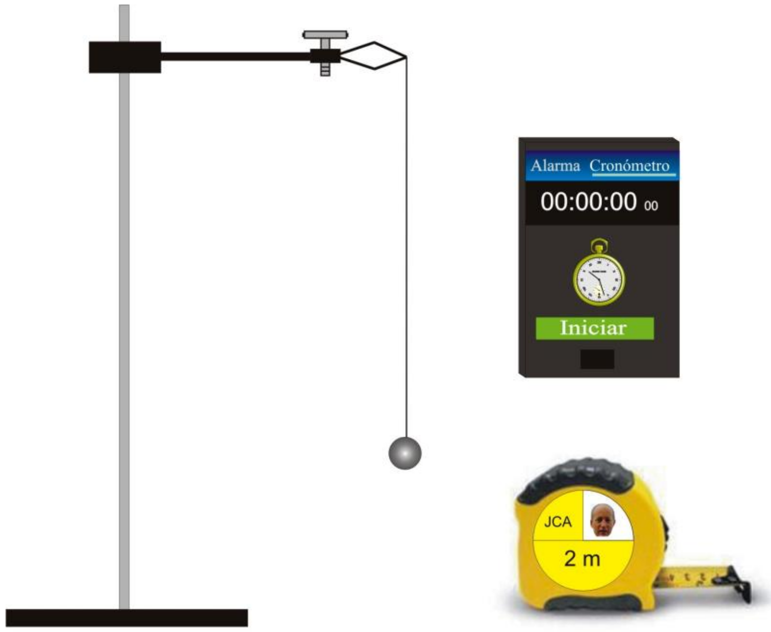
A.4. *Plantead posibles diseños experimentales para contrastar cada una de las hipótesis enunciadas anteriormente.*

4.1. Diseño tradicional (utilizando cronómetro)

La idea general es sencilla: se trata esencialmente de montar un péndulo que se aproxime lo más posible a un péndulo simple (es decir, un péndulo en el que la cuerda sea prácticamente inextensible y su masa sea muy inferior a la masa de la esfera constituida por un material muy denso y de radio pequeño) e ir variando cada uno de los factores, manteniendo constantes los demás (separación de variables).

Para montar tal péndulo sólo se precisa una bola, hilo y un soporte adecuado (objetos que suelen encontrarse en la mayoría de los laboratorios escolares). Esto conduce a concebir el diseño experimental más habitual o “tradicional”:

Realizar un montaje como el que muestra el dibujo siguiente para hacer oscilar al péndulo, en el que usa una cinta métrica para obtener medidas de su longitud y un cronómetro para medir los tiempos **(diseño experimental, 1).**



Existen, con este montaje, varios detalles de tipo técnico que es necesario tener en cuenta antes de comenzar la propia realización de los experimentos.

A.5. *Después de construir el montaje planteado en la actividad anterior, haced oscilar el péndulo y tratad de resolver dificultades que puedan observarse. En particular, señalad qué ha de entenderse por longitud del péndulo y cómo determinar de forma suficientemente precisa el valor del período.*

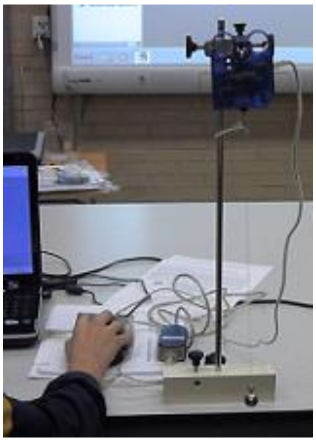
De entrada, un problema que hay que evitar es la posibilidad de que el hilo resbale. Para que no ocurra, hay que apretar bien la pinza que lo debe sujetar fuertemente por un único punto.

La longitud del péndulo deberá medirse desde el punto de suspensión hasta el centro de la bola. Por tanto, se puede determinar fácilmente sumando a la longitud del hilo el radio de la bola.

Por otra parte, cuando se hace oscilar el péndulo y se trata de obtener, a modo de prueba, el tiempo de una oscilación, queda en evidencia que, como el cronómetro se acciona manualmente, hay una imprecisión importante en la medida del tiempo (mayor que la sensibilidad del cronómetro). Una posibilidad para solucionar este problema sería medir el tiempo t que tarda el péndulo en realizar N oscilaciones completas y dividir dicho tiempo por el número de oscilaciones realizadas con lo que obtendríamos: $T = t/N$. Sin embargo, ello supone admitir implícitamente que el valor del ángulo de oscilación "θ", no influye en el período. En efecto: si se miden, por ejemplo, 20 oscilaciones, es evidente que el ángulo de oscilación va a ser mayor durante las primeras 5 oscilaciones que durante las 5 últimas por lo que, si el valor de T dependiese de θ, no podría calcularse por medio de $T = t/N$. Por tanto, lo primero que hay que hacer es estudiar la posible dependencia de T con θ.

4.2. Diseño alternativo (utilizando un sensor de fuerza)

Para que los alumnos planteen este segundo diseño, es necesario que hayan realizado previamente en el laboratorio algunas experiencias usando un sensor de fuerza. También conviene que apliquen correctamente los principios de la dinámica al péndulo simple, sabiendo distinguir las fuerzas que se ejercen sobre la bola, tanto cuando está oscilando como cuando se halla en equilibrio. En particular, es necesario que comprendan que la tensión del hilo sólo tiene el mismo valor que la fuerza peso cuando la bola se encuentra en reposo en su posición más baja (hilo en vertical), mientras que cuando la bola está oscilando y pasa por esa misma posición, existe una aceleración centrípeta y el valor de la tensión supera al de la fuerza peso. En el anexo 3 incluido al final de este trabajo se proponen algunas actividades para reforzar estos conceptos en el aula, y, también, en el laboratorio, utilizando un sensor de fuerza para medir la tensión del hilo correspondiente a distintos estados de la bolita del péndulo.



Así pues, si los alumnos poseen los conocimientos teórico-prácticos mencionados en el párrafo anterior, es posible que se plantee también el siguiente diseño:

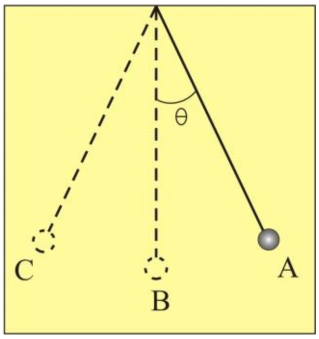
Hacer oscilar el péndulo colgado de un sensor de fuerza y representar gráficamente la evolución de la tensión de la cuerda (que se ejerce sobre el ganchito del sensor) durante las oscilaciones. Obtener luego el periodo a partir de dicha representación, bien directamente, o realizando con el programa un ajuste sinusoidal **(diseño experimental, 2).**

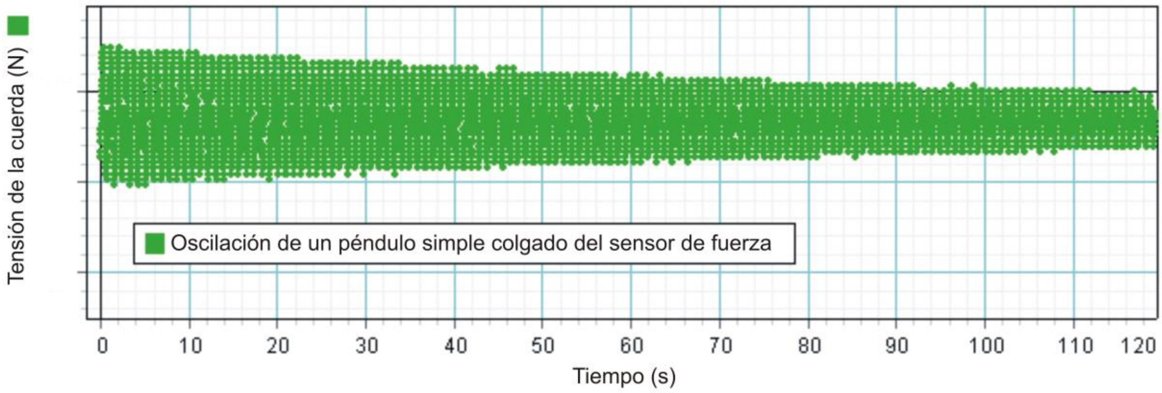
También existen, con este montaje, varios aspectos que es necesario considerar en relación con la forma de obtener y analizar los resultados.

A.6. *Realizad el montaje con el sensor de fuerza y ved cómo se puede obtener el periodo del péndulo.*

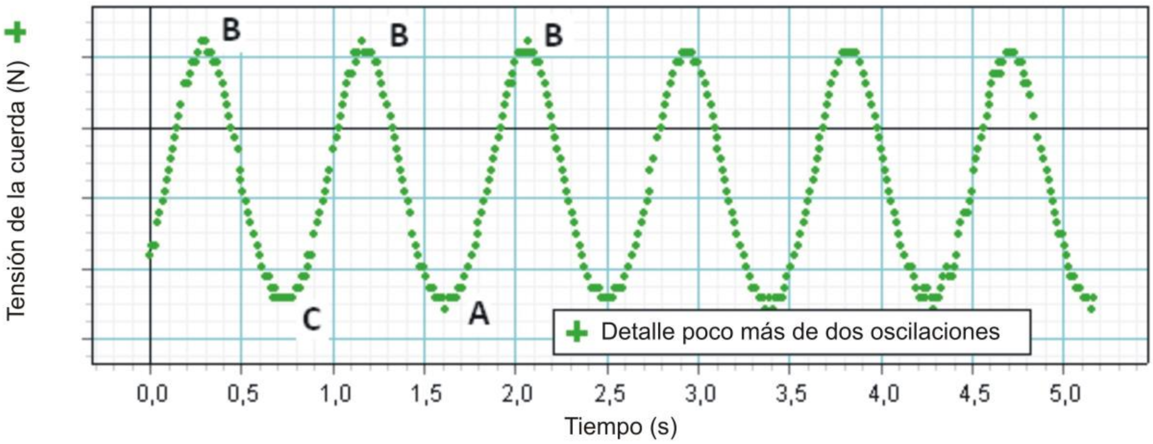
Cuando se hace oscilar el péndulo colgado del sensor, el módulo de la tensión del hilo también oscila mientras lo hace el péndulo, ya que toma un valor máximo cada vez que la bola pasa por su posición más baja (B), y un valor mínimo cada vez que la bola alcanza una de las dos posiciones extremas (A o C). Para registrar dicha oscilación, los alumnos proponen usar el software del sensor para construir una gráfica de la evolución de la tensión. A partir de dicha gráfica podrá obtenerse el periodo del péndulo.

A modo de ejemplo, la siguiente gráfica fue obtenida por alumnos de 1º Bachillerato en el IES "Leonardo de Vinci" de Alicante, dejando oscilar al péndulo durante un intervalo de tiempo amplio. Dicha gráfica, además de constatar las oscilaciones del valor de la tensión, permite observar que, a medida que el movimiento se va amortiguando, los valores máximos y mínimos de dicha tensión se van aproximando entre sí (si se dejara oscilar al péndulo indefinidamente, acabaría en reposo en posición vertical y en esa posición el módulo de la tensión ya sería igual al módulo del peso de la bolita).





Cada oscilación supone un recorrido completo de ida y vuelta del péndulo y, por tanto, abarca a tres máximos consecutivos (o tres mínimos) de la gráfica anterior, ya que la tensión del hilo durante una oscilación completa toma su valor máximo en la posición B (**B**C**B**A**B**) o mínimo en las posiciones A y C (**A**B**C**B**A**) tres veces consecutivas, por lo que el periodo corresponderá a la separación entre esos tres valores extremos consecutivos de la gráfica. Así, por ejemplo, la representación siguiente, que construyeron los alumnos seleccionando un pequeño intervalo de la gráfica anterior, corresponde a poco más de dos oscilaciones (sobre ella hemos indicado una secuencia de posiciones **B**C**B**A**B**, correspondiente a una oscilación).



Como veremos de forma concreta en el siguiente apartado, a partir de una gráfica como la anterior, el periodo se puede obtener simplemente midiendo encima de ella el intervalo de tiempo transcurrido entre el primer y tercer máximo (o entre el primer y tercer mínimo), o, también puede hacerse, realizando un ajuste sinusoidal que proporciona este y otros parámetros del movimiento de oscilación.

Vemos así que la mecánica seguida con los dos diseños expuestos es la misma. Tan solo se diferencian en que con el primero el periodo se obtiene midiendo tiempos con un cronómetro, mientras que con el segundo diseño, el periodo se obtiene midiendo tensiones del hilo mediante un sensor de fuerza.

5. Realización de los experimentos y recogida de datos

A continuación se plantean distintas experiencias con las que analizar la posible influencia en el periodo de los factores considerados en la fase de emisión de hipótesis, es decir, de la amplitud de oscilación, la masa de la bolita que oscila y la longitud.

5.1. Estudio de la posible influencia de la amplitud

A.7a. *Realizad los experimentos necesarios para contrastar las hipótesis sobre de la posible influencia de la amplitud en el periodo del péndulo simple (diseño1).*

Al realizar los experimentos suelen plantearse algunos problemas sobre los que conviene estar al tanto. Es preciso, por ejemplo, no comenzar a contar el tiempo nada más soltar la bola y esperar a que el péndulo se estabilice.

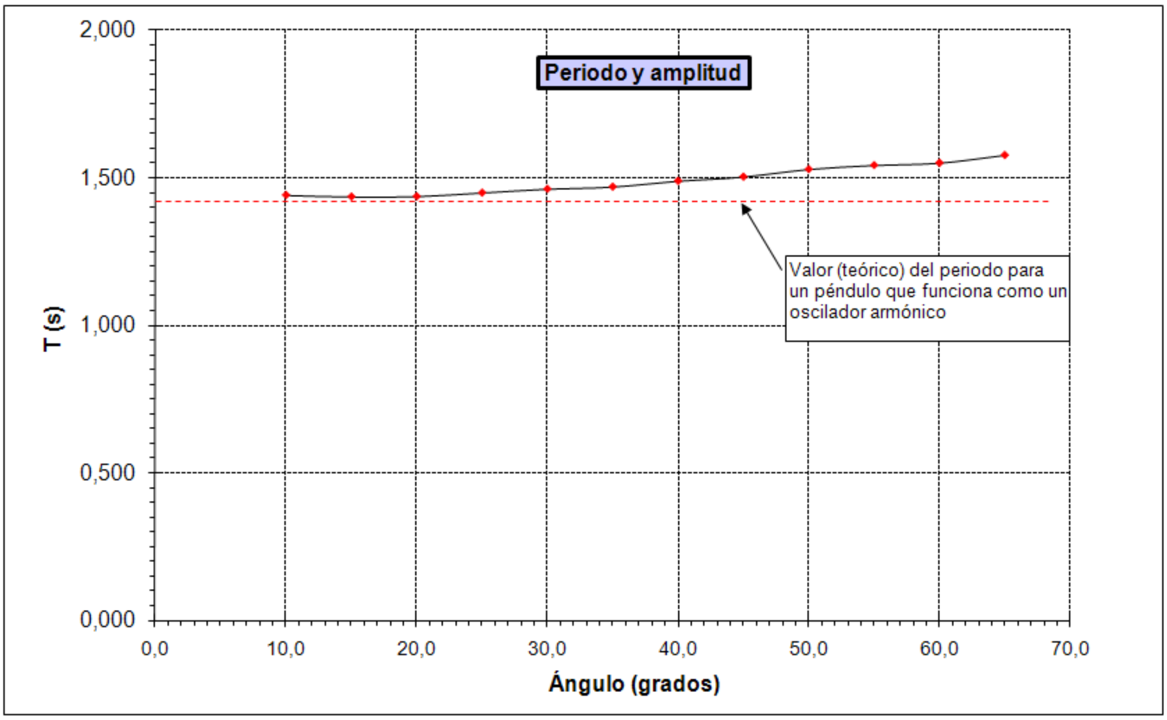
Los alumnos, distribuidos en pequeños grupos de 3 a 5 integrantes, pueden determinar el periodo de un péndulo de una determinada longitud y masa, con dos ángulos diferentes. Utilizando el diseño experimental 1, y siempre que los ángulos iniciales induzcan oscilaciones de “pequeña amplitud” (en todo caso, por debajo de 30º), se obtienen unos registros semejantes a los que muestra la tabla adjunta (obtenida por un grupo de alumnos en un centro escolar de Alicante, para un péndulo de 70 cm de longitud):

Amplitud	**Tiempo 10 oscilaciones (s)**			**Periodo**		
10 º < θ < 25 º	16’70	17’75	17’00	1’67	1’78	1’70
5 º < θ < 10 º	16’60	16’40	16’70	1’66	1’64	1’67

Al comparar estos resultados (y otros similares obtenidos por otros grupos) con la hipótesis, muchos estudiantes se sorprenden porque, aunque parecen mostrar, en consonancia con la hipótesis mayoritaria, que el periodo es algo mayor para la amplitud mayor, también ponen en evidencia que, en todo caso, esta variación es muy pequeña, mucho menor de lo esperado. De hecho, el que la amplitud de las oscilaciones tenga tan poca influencia en el periodo (siempre que sean oscilaciones de pequeña amplitud), da la posibilidad de seguir adelante con los estudios sobre la influencia del resto de factores, sin tener que preocuparnos de controlar esta variable. Esta sería, pues, una posible opción de continuación del trabajo:

Acotar el estudio solo a oscilaciones de pequeña amplitud y despreciar legítimamente su influencia en el valor del periodo, T.

No obstante, también podemos detenernos brevemente en un estudio más preciso sobre la influencia de esta variable, realizando para ello un amplio número de mediciones del periodo para ángulos crecientes y utilizando una hoja de cálculo (por ejemplo, de Excel) para obtener cada valor del periodo, representando gráficamente la relación entre periodo y amplitud. En la gráfica siguiente se muestran unos resultados tratados de esta forma, con el diseño experimental 1, por un grupo de estudiantes de 1º Bachillerato en el IES "La Magdalena" en Avilés (Asturias).



Como se puede observar estos resultados confirmaron que para ángulos comprendidos entre 10 y 20º, el período de las oscilaciones se mantiene prácticamente constante. Este resultado es coherente con lo predicho en el marco teórico, en el cual se considera que para valores de ángulo inferiores a 10º la aproximación sen $\theta \approx \theta$ es aceptable.

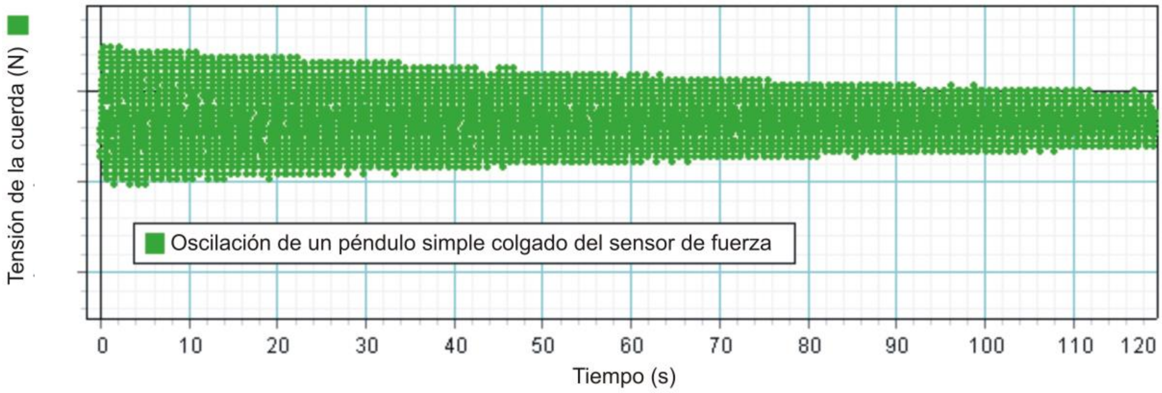
El experimento completo se puede consultar en la página fisquiweb del profesor Luis Ignacio García. Ahí también se puede descargar la hoja de cálculo que usaron sus alumnos, ya preparada para la toma de datos.

Con el diseño experimental 2, también se puede estudiar la influencia de la amplitud.

A.7b. *Usad el sensor de fuerza (diseño experimental 2) para estudiar la posible influencia de la amplitud en el periodo del péndulo simple.*

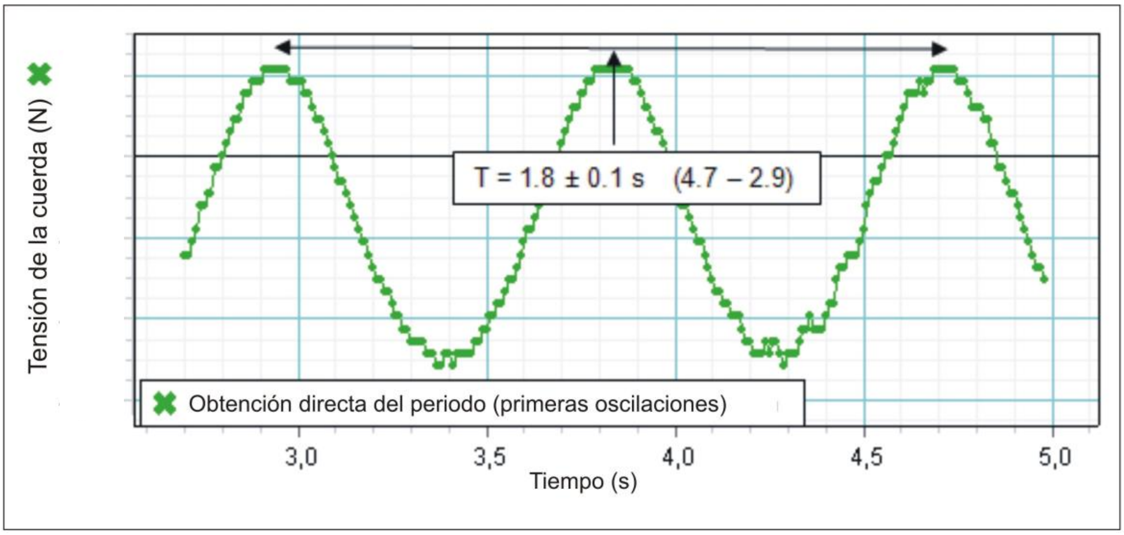
Como ya se ha visto, con el sensor se puede registrar la evolución de la tensión del péndulo y habrá que hacerlo durante un tiempo bastante amplio, para empezar a registrar oscilaciones con un ángulo relativamente grande (unos 60º) y terminar de tomar mediciones con un ángulo pequeño (unos 5º o 10º). De la gráfica correspondiente se pueden obtener valores del periodo para las amplitudes cada vez menores con las que va oscilando el péndulo a medida que se amortigua su movimiento.

Aunque la variación en el periodo es muy pequeña, la sensibilidad del sensor permite que sea apreciada y, así, por ejemplo, a partir de la gráfica que hemos mostrado anteriormente:

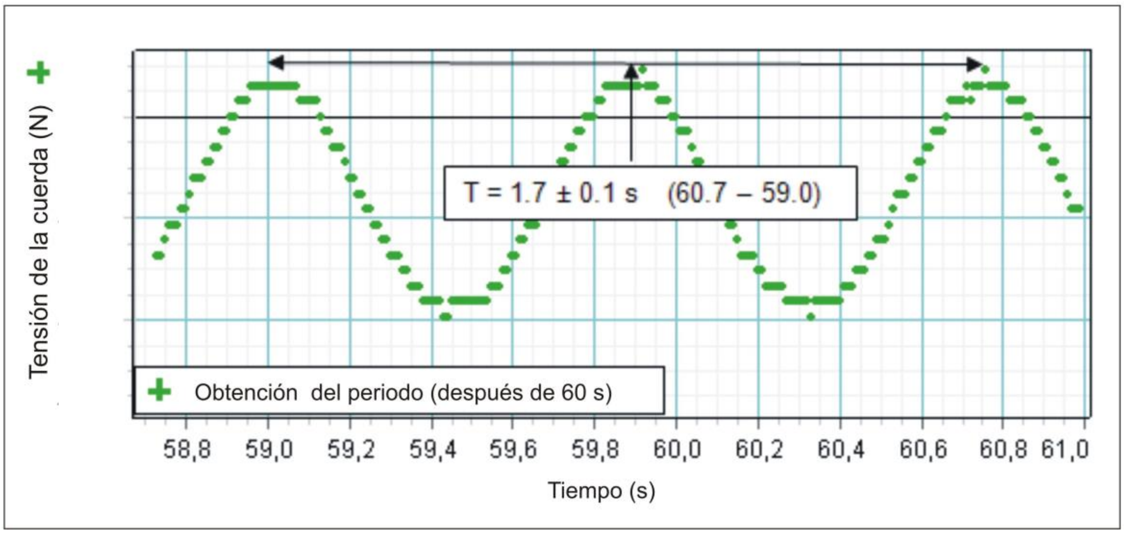


los alumnos pudieron obtener el periodo de oscilaciones de amplitudes paulatinamente decrecientes seleccionando tramos que las contienen y que estaban separados por intervalos iguales de tiempo (en este caso, lo hicieron cada 20 s). Cada oscilación se corresponde con un recorrido completo de ida y vuelta del péndulo y, por tanto (como ya hemos visto), abarca a tres máximos consecutivos (o tres mínimos) de la gráfica.

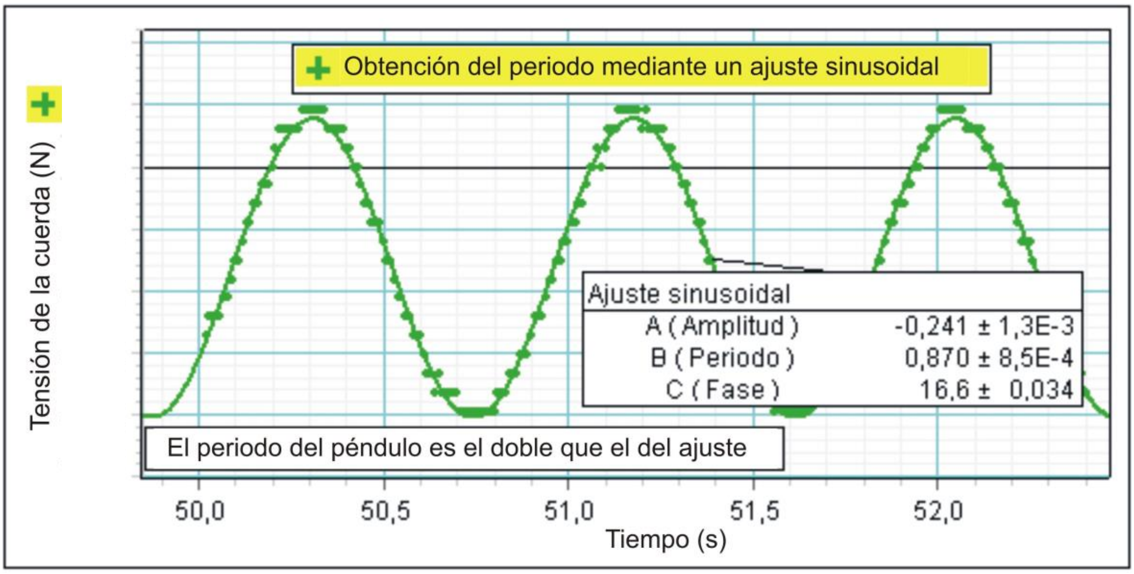
En las oscilaciones iniciales (de mayor amplitud) obtuvieron: T = (1.8 ± 0.1) s.



Y en las posteriores (de menor amplitud) obtuvieron: T= (1.7 ± 0.1) s.



Estos mismos resultados, se pueden obtener con mayor precisión realizando con el programa un ajuste sinusoidal en las gráficas, ya que dicho ajuste proporciona los tres parámetros básicos de la oscilación registrada por el sensor (amplitud, periodo y fase). Usando este procedimiento, hay que tener en cuenta que el periodo de la oscilación en la tensión de la cuerda (que es lo que mide el sensor) es exactamente igual a la mitad del periodo de una oscilación completa del péndulo simple.



Para redondear estos trabajos acerca de la influencia de la amplitud en el periodo, el profesor puede informar de que la solución de la ecuación del movimiento del péndulo para oscilaciones de cualquier amplitud confirma esta dependencia y proporciona valores que se van separando (acercando) cada vez más de la solución correspondiente a una influencia nula de la amplitud, conforme la amplitud va aumentando (disminuyendo). Por supuesto, todos los estudios experimentales realizados con una mayor precisión también confirman este resultado.

También puede ser muy instructivo en este momento conocer algunos detalles de los estudios pioneros de Galileo y de Huygens, sobre el péndulo simple.

A.8. *Galileo, en la segunda mitad del siglo XVI, fue quizá el primero en darse cuenta de la poca influencia de la amplitud en el periodo del péndulo simple. Haced un estudio bibliográfico sobre los trabajos y las aportaciones de Galileo en relación con el péndulo simple.*

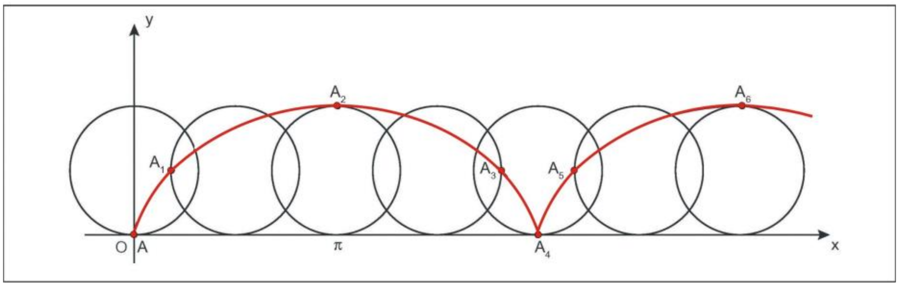
En cualquier libro (o en Internet), se puede encontrar el relato de la leyenda, según la cual Galileo, un domingo de 1583, cuando era un estudiante de apenas 18 años, se distrajo en la catedral de Pisa al observar el movimiento oscilatorio de una gran lámpara colgante suspendida del techo. Galileo se sorprendió al ver que el candelero parecía batir tiempos iguales, fuera cual fuese la amplitud de las oscilaciones y, supuestamente, cuando terminó la misa corrió a su casa, donde ató distintas pesas en el extremo de varias cuerdas para repetir la experiencia. Cronometró las oscilaciones, utilizando como patrón de medida del tiempo su propio pulso (en aquella época no se disponía de cronometro alguno para medir con un mínimo de precisión el tiempo) y confirmó que la amplitud apenas influye en el periodo.

Sea o no verdadera esta leyenda, lo que sí parece ser cierto es que Galileo sugirió utilizar un péndulo de una longitud dada para medir el pulso de los pacientes (este aparato conocido como el "pulsómetro", se hizo muy popular en la medicina) y que también se planteó construir un reloj de péndulo, aunque no lo consiguió precisamente porque, como hemos podido ver anteriormente, el periodo del péndulo simple en realidad sí depende de la amplitud, aunque esa influencia se hace prácticamente insignificante cuando se manejan ángulos pequeños.

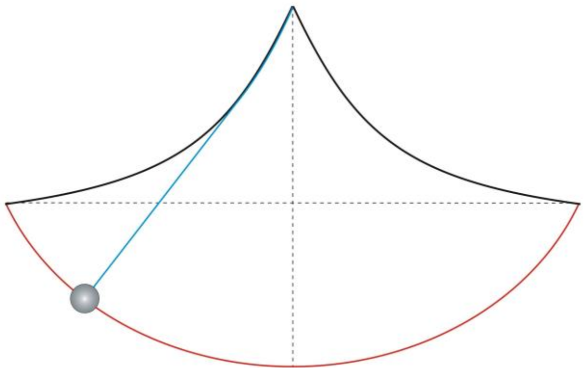
Algo más de 70 años después, Huygens resolvió brillantemente este problema.

A.9. *Huygens, en 1567 consiguió aplicar con éxito el péndulo a un reloj que el mismo diseño. Realizad una búsqueda bibliográfica acerca de este hecho.*

Para diseñar su péndulo, Huygens se basó en la curva “cicloide”, que, tal como muestra la figura adjunta, se define como aquella que describe un punto de una circunferencia (en la figura el punto de color rojo), la cual rueda a lo largo de una recta horizontal.



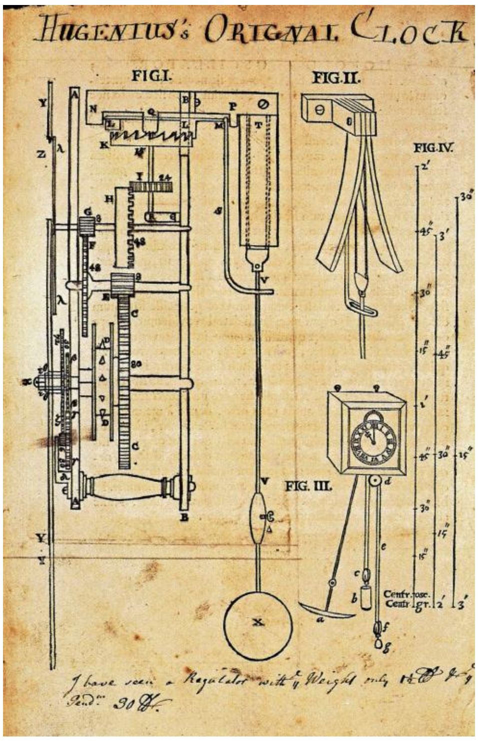
Huygens suspendió el hilo de su péndulo entre dos contornos sólidos que tenían la forma de arcos de cicloide tangentes en su punto de unión. Así, al oscilar, el péndulo se ceñía a uno u otro de esos dos contornos, y su longitud efectiva disminuía en una proporción que depende de la amplitud de las oscilaciones. Huygens demostró que cuando la circunferencia que generan los dos contornos tiene un radio igual a la cuarta parte de la longitud del péndulo, entonces la bolita del péndulo describe un arco de cicloide y el péndulo, al hacerlo oscilar, resulta rigurosamente isócrono (su periodo es constante).



Sobre este logro, los alumnos pueden leer el siguiente texto escrito por el propio Huygens:

"El péndulo simple no puede ser considerado como una medida del tiempo segura y uniforme, porque las oscilaciones amplias tardan más tiempo que las de menor amplitud; con ayuda de la geometría he encontrado un método, hasta ahora desconocido, de suspender el péndulo; pues he investigado la curvatura de una determinada curva que se presta admirablemente para lograr la deseada uniformidad. Una vez que hube aplicado esta forma de suspensión a los relojes, su marcha se hizo tan pareja y segura, que después de numerosas experiencias sobre la tierra y sobre el agua, es indudable que estos relojes ofrecen la mayor seguridad a la astronomía y a la navegación. La línea mencionada es la misma que describe en el aire un clavo sujeto a una rueda cuando ésta avanza girando; los matemáticos la denominan cicloide, y ha sido cuidadosamente estudiada porque posee muchas otras propiedades; pero yo la he estudiado por su aplicación a la medida del tiempo ya mencionada, que descubrí mientras la estudiaba con interés puramente científico, sin sospechar el resultado."

Finalmente, conviene destacar que el llamado "reloj de péndulo" fue el primer reloj de precisión de la historia. En la figura siguiente se ha reproducido el esquema original del reloj de péndulo diseñado por Huygens, donde se observan los contornos sólidos con forma de arco de cicloide entre los que oscila el péndulo.



5.2. Estudio de la posible influencia de la masa

A.10. *Realizad los experimentos necesarios para contrastar las hipótesis sobre de la posible influencia de la masa en el periodo del péndulo simple.*

La utilización de bolas iguales pero de distinto material (por ejemplo, acero y aluminio), en péndulos de la misma longitud a los que se hace oscilar con una amplitud pequeña, permite comprobar experimentalmente (con cualquiera de los dos diseños propuestos), en este caso de forma inequívoca, que <u>la masa no influye en el valor del periodo.</u>

A.11. *Intentad explicar a qué puede deberse el hecho de que la masa del péndulo simple no influya en su periodo.*

La profundidad de la respuesta que pueden dar los alumnos a esta cuestión depende fundamentalmente (al igual que sucedía con el caso de la caída en vertical desde pequeñas alturas) de los conocimientos que ya tengan de Dinámica.

En todo caso, conviene pedirles que recuerden con qué argumentos apoyaron su hipótesis. Unos suelen decir que la bolita de mayor masa es más atraída por la Tierra y que, por eso, debería oscilar más rápidamente, pero también es habitual que otros duden de esta conclusión y sugieran la idea de que quizás la bolita de mayor masa desciende más rápido pero también asciende con mayor lentitud que la otra y ambos efectos se compensan, explicando así que el periodo sea el mismo en ambos casos. Se pueden pensar sencillas experiencias para poner a prueba estas ideas.

A.12. *Diseñad y llevad a cabo experiencias sencillas para comprobar: a) Si la bola de acero es, efectivamente, más atraída por la Tierra que la bola de plástico. b) Si, de ser así, la bola más atraída desciende más rápidamente y asciende más lentamente que la otra.*

Para comprobar el primer punto, los alumnos pueden medir la masa de cada bola mediante una balanza y luego colgar sucesivamente cada una de las dos bolas de un mismo muelle, de un dinamómetro, o de un sensor de fuerza.

Se constata que la bola de mayor masa es más atraída que la de menor masa puesto que el dinamómetro se alarga más para la primera que para la segunda. Además se puede comprobar también que la proporción entre lo que señala el dinamómetro (equivalente a su alargamiento) o lo que registra el sensor de fuerza y el valor de la masa que cuelga, es siempre la misma.

En cuanto a la segunda cuestión, se puede realizar una experiencia muy sencilla destinada a observar conjuntamente el movimiento de oscilación de dos péndulos de la misma longitud y masas diferentes. Se trata simplemente de colgar ambos de sus respectivos soportes y soltarlos simultáneamente con un mismo ángulo inicial, de modo que las oscilaciones se realicen en paralelo. El experimento muestra que ambos péndulos oscilan de forma perfectamente sincronizada.

Llegados a este punto, podemos plantearnos otra cuestión:

¿Por qué, aunque una bola de mayor masa (por ejemplo de acero) es más atraída por la Tierra que otra de menor masa (por ejemplo, de aluminio), ambas oscilan sincrónicamente cuando forman parte de péndulos simples de la misma longitud y amplitud?

Una respuesta correcta a la cuestión anterior exige, lo mismo que ocurre cuando se plantea la misma pregunta para el caso de la caída libre de dos masas distintas, conocer la igualdad existente en cuanto a los valores de dos magnitudes diferentes: la masa inercial y la masa gravitatoria. Es el hecho de que estos valores sean iguales, lo que realmente explica que péndulos de distinta masa puedan oscilar con el mismo periodo (a igualdad de longitud y amplitud) o que dos cuerpos de distinto peso, dejados caer desde la misma altura caigan con la misma aceleración. Naturalmente, estos razonamientos no pueden detallarse en cursos iniciales de Física, pero sí es posible hacerlo en cursos más avanzados. Para este último caso, se puede consultar el anexo 2.

5.3. Estudio de la posible influencia de la longitud

Se pretende contrastar finalmente la hipótesis en la que suele producirse un consenso más elevado, ya que casi todos los alumnos suponen que al aumentar la longitud, deberá aumentar el periodo.

A.13. *Precisad el diseño y realizad los experimentos necesarios para contrastar la hipótesis planteada acerca de la posible influencia de la longitud en el periodo del péndulo simple.*

Al concretar el diseño experimental tenemos en cuenta la no influencia de la masa y que la influencia de la amplitud se puede despreciar para oscilaciones de pequeña amplitud. Podemos así despreocuparnos de estas dos variables y, en esas condiciones, bastan unas pocas medidas para comprobar de forma cualitativa que el periodo aumenta claramente al aumentar la longitud del péndulo.

A partir de aquí, se plantea la conveniencia de obtener resultados más amplios y precisos, con objeto de analizarlos cuantitativamente y, a ser posible, obtener también una expresión matemática de la dependencia entre el periodo y la longitud. Los alumnos proponen que se determine experimentalmente el periodo del péndulo simple para longitudes crecientes del mismo. Puesto que habrá que obtener un cierto número de mediciones para cada longitud, se puede organizar el experimento de forma que todos los equipos midan el periodo que corresponde a todas las longitudes o, alternativamente, pidiendo a cada uno de tales equipos que determine el periodo para una determinada longitud del péndulo, hasta completar entre todos el número de longitudes previsto.

A modo de ejemplo, la tabla siguiente recoge resultados que obtuvieron alumnos de 3º ESO (organizados en 9 equipos distintos) en el IES "Leonardo da Vinci" de Alicante. Todos ellos utilizaron cronómetros manuales para medir el tiempo correspondiente a 10 oscilaciones, del que se deriva el valor del periodo (una oscilación).

Longitud (cm)	Tiempo 10 oscilaciones (s)									Valor representativo (s)	Periodo (s)
10	7.0	6.9	6.7	6.4	6.7	6.6	6.5	6.4	6.6	6.5 ± 0.1	0.65 ± 0.01
15	7.8	8.2	8.2	8.0	8.1	8.0	7.9	7.9	7.8	7.9 ± 0.1	0.79 ± 0.01
20	9.1	8.9	9.2	9.2	9.2	9.1	8.9	9.0	9.0	9.0 ± 0.1	0.90 ± 0.01
25	10.2	10.0	10.0	10.2	10.2	10.2	10.3	10.1	10.2	10.1 ± 0.1	1.01 ± 0.01
30	11.2	11.0	11.2	11.0	11.0	11.0	11.1	11.2	11.0	11.0 ± 0.1	1.10 ± 0.01
35	12.3	12.1	12.0	12.1	11.9	11.8	12.1	12.0	12.3	12.0 ± 0.1	1.20 ± 0.01
40	12.8	12.7	12.7	12.9	12.7	12.7	12.8	12.7	12.7	12.7 ± 0.1	1.27 ± 0.01
45	13.5	13.3	13.3	13.5	13.3	13.4	13.3	13.3	13.4	13.4 ± 0.1	1.34 ± 0.01
50	14.2	14.2	14.1	14.3	14.3	14.3	14.2	14.2	14.1	14.2 ± 0.1	1.42 ± 001
55	15.0	14.9	14.9	15.0	15.1	15.0	15.0	14.9	14.9	15.0 ± 0.1	1.50 ± 0.01
60	15.3	15.5	15.5	15.3	15.5	15.4	15.5	15.5	15.6	15.5 ± 0.1	1.55 ± 0.01
65	16.1	16.0	16.1	16.1	16.1	16.0	16.3	16.0	16.3	16.2 ± 0.1	1.62 ± 0.01
70	16.8	16.6	16.8	16.9	16.8	16.7	16.6	16.7	16.7	16.8 ± 0.1	1.68 ± 0.01

Como se ve estos resultados muestran que, tal y como se había supuesto, al aumentar la longitud, L, el valor del periodo, T, también aumenta. Esto ya sería suficiente para los primeros cursos de Física, quedando como perspectiva abierta la obtención de la relación matemática existente entre ambas magnitudes.

Para cursos más avanzados (como los de Bachillerato), se puede continuar señalando que la tabla no proporciona el tipo de relación matemática existente entre L y T y que encontrar dicha relación sería importante ya que, por ejemplo, nos permitiría calcular teóricamente el valor del período de cualquier péndulo simple con solo conocer su longitud, sin necesidad de realizar ningún experimento.

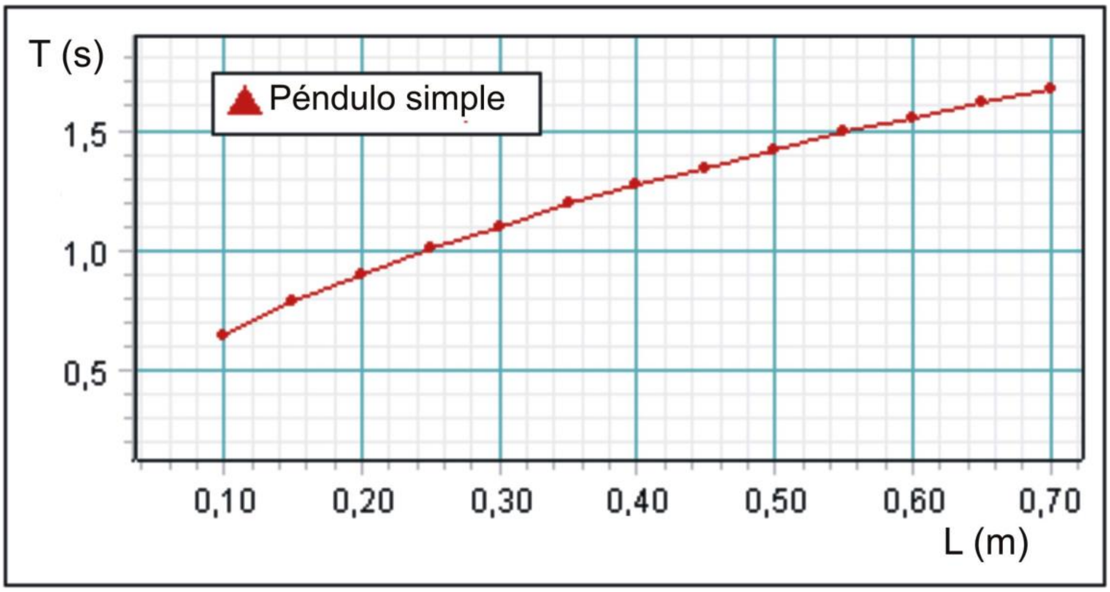
A.14. *¿Qué se puede hacer con los datos obtenidos para descubrir el tipo de relación matemática que liga el periodo con la longitud del péndulo simple?*

Los alumnos proponen representar gráficamente el periodo, T, frente a la longitud, L, y analizar el tipo de línea que salga.

Relación Longitud-Periodo
Péndulo simple

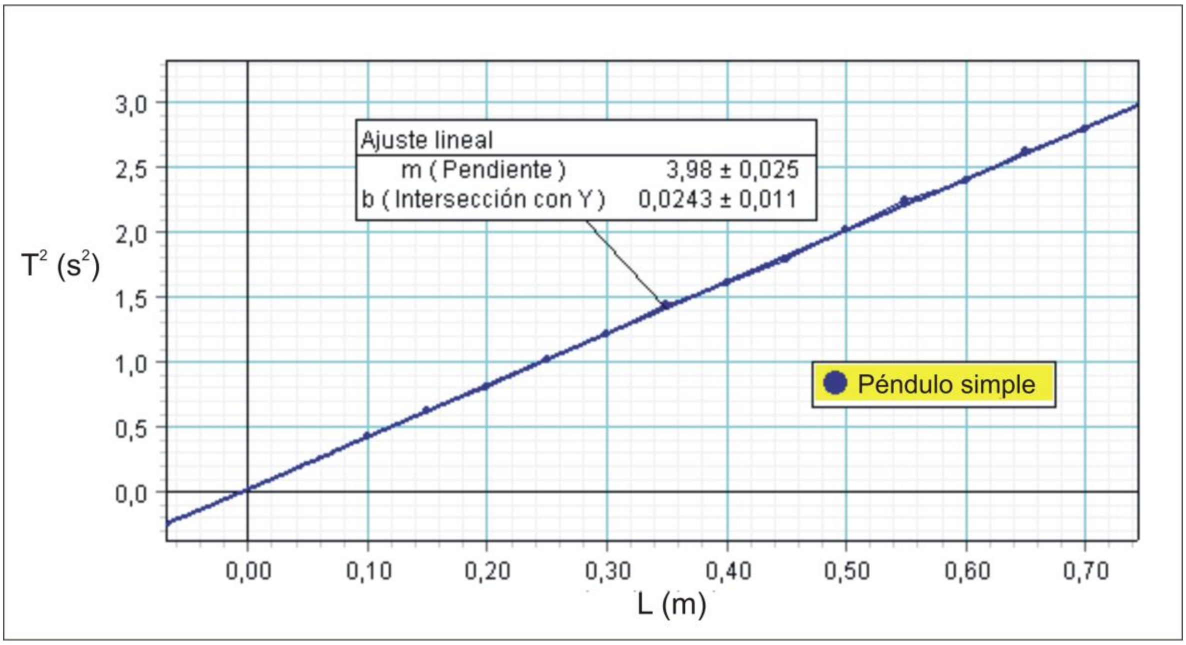
L (m)	T (s)
0,10	0,65
0,15	0,79
0,20	0,90
0,25	1,01
0,30	1,10
0,35	1,20
0,40	1,27
0,45	1,34
0,50	1,42
0,55	1,50
0,60	1,55
0,65	1,62
0,70	1,67

Al hacerlo, con los datos reflejados en la tabla anterior, se observa que se obtiene lo que parece ser una parábola invertida:



por lo que no resulta difícil establecer como posible ecuación de dicha curva: $L = k \cdot T^2$ o, lo que es equivalente: $T^2 = (1/k) \cdot L$

Para comprobar esta hipótesis, basta con calcular los correspondientes valores de T^2 y representarlos frente a L. En caso de ajustarse a una línea recta, ello supondrá la confirmación de dicha hipótesis. Fueron alumnos de 1º de Bachillerato quienes utilizando los datos obtenidos por sus compañeros de 3º de ESO (expresados en unidades internacionales), obtuvieron la gráfica que se reproduce a continuación:



La gráfica anterior, confirma que la relación entre el periodo y la longitud obedece, como se había supuesto, a la ecuación:

$$T^2 = (1/k) \cdot L \quad \rightarrow \quad \boxed{T = C \cdot \sqrt{L}} \quad \text{donde } C = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

A partir de la gráfica, podemos calcular el valor de la constante C. Basta con utilizar el valor de la pendiente m de la recta obtenida:

$$m = (1/k) \rightarrow k = (1/m) \rightarrow C = \sqrt{m}$$

Conviene saber que en unidades internacionales el valor obtenido para 1/k en experiencias realizadas al nivel del mar ha de ser muy próximo a 4 (en el caso recién expuesto 3’98), por lo que la relación anterior puede expresarse finalmente como:

$$T = 2 \cdot \sqrt{L}$$

A.15. *Comprobad la validez de la expresión obtenida utilizándola para obtener el periodo correspondiente a algunos de los péndulos manejados en este trabajo práctico y comparar el resultado teórico con el experimental recogido en la tabla anterior.*

Basta sustituir los valores de las longitudes en la ecuación anterior, para comprobar la elevada coincidencia entre los valores teóricos y los valores experimentales del periodo.

6. Perspectivas abiertas. Nuevos problemas

Algunas de las perspectivas se han ido sugiriendo durante el trabajo. Ahora conviene recordarlas, añadir otras, y expresarlas todas de la forma más precisa posible.

A.16. *Enumerad las perspectivas abiertas, susceptibles de originar nuevos estudios*

Podemos referirnos, entre otros, a los siguientes nuevos problemas que podrían ser investigados:

✓ Si el trabajo práctico se ha realizado en Secundaria Obligatoria, habrá quedado pendiente una explicación fundamentada de por qué la masa no influye en el periodo del péndulo simple.

✓ Con independencia del nivel al que se haya realizado el trabajo práctico, quizá no se hayan realizado las actividades sobre los trabajos de Galileo y de Huygens. En ese caso, ahora podría sugerirse un estudio sobre la posible aplicación práctica del péndulo simple a la construcción de un reloj.

✓ En este trabajo práctico hemos limitado el estudio de movimientos de oscilación al caso particular del péndulo simple. Cabe plantear una posible ampliación para investigar el comportamiento de otros osciladores. En particular, podría plantearse el estudio del péndulo físico y también el de otros objetos que realizan oscilaciones, como, por ejemplo, el extremo de un muelle elástico.

✓ Estos posibles estudios sobre otros osciladores, también sugieren el entendimiento de aplicaciones prácticas de diferente índole. Por ejemplo, la construcción de un metrónomo (péndulo físico), las investigaciones sobre el comportamiento de materiales elásticos (muelle) y sus aplicaciones prácticas como, entre otras, el diseño de edificios antiterremotos, los amortiguadores, etc.

- ✓ Una cuestión muy importante que ha quedado latente y conviene ahora retomar es el hecho de que la influencia de la gravedad no se ha tenido en cuenta por realizarse el experimento siempre en un mismo lugar. Ahora bien, al haber obtenido una relación entre la longitud del péndulo y el cuadrado del periodo, hemos de pensar que dicho factor se encontrará dentro de la constante de proporcionalidad entre tales magnitudes. Por tanto, cabe sugerir, como una posibilidad de ampliación del trabajo, precisamente, la posible obtención del valor de g. Más precisamente, interesará realizar un estudio teórico del péndulo simple (ver el anexo 1), para expresar dicha constante, en función de g, como paso previo para utilizar el propio péndulo simple, como medio de obtención experimental del valor de la gravedad (ver el anexo 4).

- ✓ Puesto que el péndulo simple oscila siempre en el mismo plano, pero, al mismo tiempo, la Tierra está rotando alrededor de su eje, cabe sugerir la idea de que quizá observando la oscilación de un péndulo simple se pueda deducir dicha rotación terrestre (péndulo de Focault, desarrollo en el anexo 6)

- ✓ Además de todo lo anterior, nos podemos referir aquí otra vez a los procesos ondulatorios, que se citaron al inicio del trabajo práctico. Es evidente que el conocimiento preciso de la física de los movimientos de oscilación es un requisito previo para poder estudiar las ondas.

La abundancia y relevancia de cuestiones pendientes permite resaltar una de las características más importantes de la metodología científica: El hecho de que una buena investigación, además de producir buenos resultados, genera nuevas preguntas, es decir, contribuye a la formulación de nuevos problemas, que deberán ser objeto a su vez de nuevas investigaciones.

9. Memoria del trabajo

Para terminar, planteamos que los estudiantes recojan el trabajo realizado en una memoria de la investigación.

A.17. *Elaborad un informe detallado que recoja el trabajo realizado y en donde se destaquen cada una de sus fases: Planteamiento del problema, análisis del problema, emisión de hipótesis, diseño de experimentos, recogida de datos, análisis de resultados.*

Conviene superar la connotación habitual de este tipo de actividad como simple ejercicio escolar, destinado a ser calificado por el profesor, para darle sentido como ejemplo de situación que fomenta la comunicación científica. A tal fin, consideramos esencial que se organice alguna sesión en la que los equipos de estudiantes puedan exponer sus trabajos, sea oralmente (con ayuda de presentaciones en PowerPoint…, vídeos, simulaciones, etc.), en forma de "póster", etc.

Una variante de la memoria, puede ser la realización de un esquema del trabajo (por ejemplo, a modo de un mapa conceptual), que también debería ser expuesto y debatido en clase.

Materiales disponibles:

En la página web de materiales didácticos de la Sección de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm) están disponibles los experimentos realizados con el sensor de fuerza que se han descrito aquí, y se pueden descargar los archivos originales de los resultados obtenidos por los alumnos usando dicho sensor.

En esa misma página están disponibles otros experimentos sobre el péndulo simple que utilizan animaciones creadas con el programa *Modellus* y con el programa *Tracker* para obtener el valor de la gravedad mediante la comparación entre el movimiento real de oscilación del péndulo (filmado por los alumnos) y una simulación del mismo. Este tipo de experimento se expone más adelante en el anexo 5. En la web se pueden descargar las animaciones y el propio programa *Modellus*.

Por su parte, la versión *Tracker* 5.0, se puede descargar de forma totalmente libre desde la dirección https://physlets.org/tracker/ Esta versión está disponible para Windows, Mac OS X, Linux 32-bit i Linux 64-bit.

En la página "fisquiweb" (https://fisquiweb.es/) está disponible el trabajo del profesor Luis Ignacio García y se puede descargar la hoja de cálculo Excel, ya preparada para recoger resultados sobre la influencia de la amplitud en el periodo del péndulo simple.

ANEXO 1.

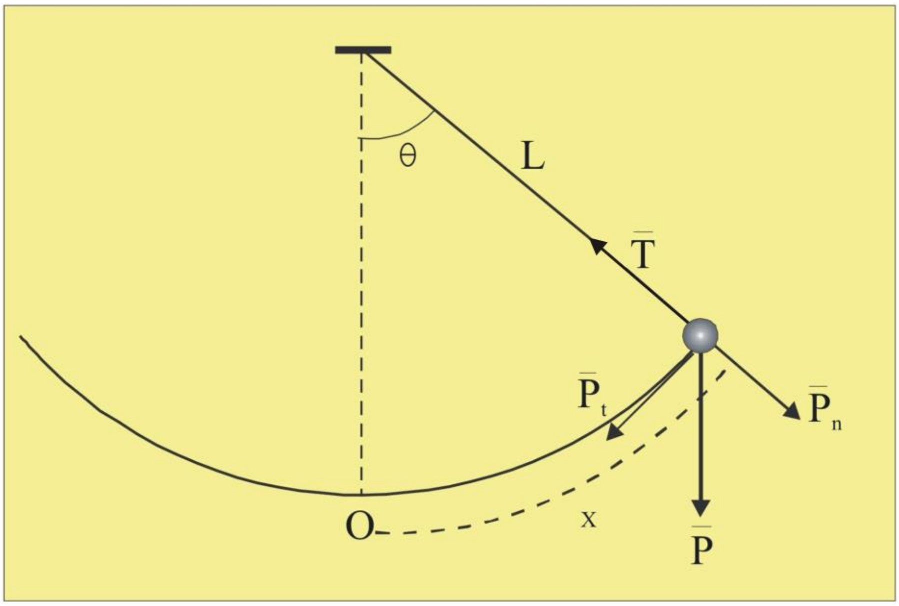
DEDUCCIÓN TEÓRICA DEL PERIODO DE UN PÉNDULO SIMPLE

Se expone una posible secuencia de actividades para el estudio teórico del péndulo simple, llegando a obtener la expresión que calcula el periodo. Para realizarlas los alumnos han de haber estudiado antes la cinemática y la dinámica del movimiento armónico simple.

A.1. *El movimiento de un péndulo simple que realiza oscilaciones de poca amplitud nos recuerda bastante al movimiento armónico simple (MAS). Sugerid algún procedimiento teórico para comprobar si, en efecto, se puede considerar también como un MAS. (Recordad que lo que caracteriza a un MAS es que la aceleración tangencial sea en todo momento directamente proporcional a la elongación y de signo contrario a ella).*

De acuerdo con la información dada en el enunciado de la actividad, hay que determinar la aceleración tangencial con que se mueve la bolita del péndulo en caso de oscilaciones de pequeña amplitud. Para ello, habrá que representar en primer lugar todas las fuerzas que actúan sobre la bolita en una posición dada y calcular la fuerza resultante sobre la bolita en componentes intrínsecas.

La figura adjunta representa un péndulo simple en un cierto instante. La elongación x en valor absoluto coincide con la longitud del arco desde O. Trataremos de averiguar si la aceleración tangencial de la bola es directamente proporcional y de signo contrario a la elongación x.



A.2. *A partir de la figura anterior y tomando como sentido positivo hacia la derecha de O sobre el papel, determinad la componente escalar tangencial de la fuerza resultante que actúa sobre la bola y a continuación su aceleración tangencial.*

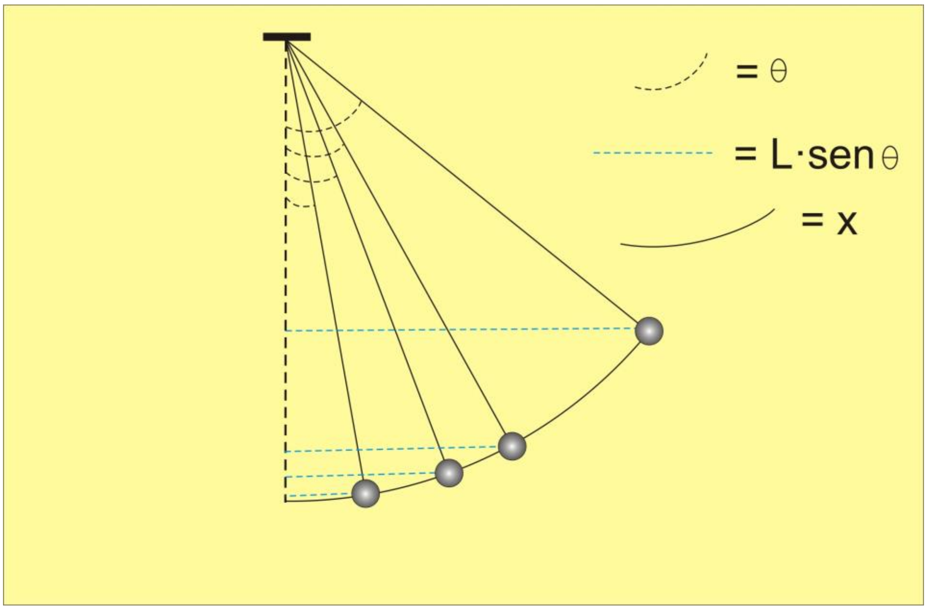
La fuerza resultante que actúa sobre la bola será la suma del peso y la tensión $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$.
Y si trabajamos en componentes intrínsecas podemos escribir que:

$\vec{P}$ = (- mg senθ , - mg cosθ)
$\vec{T}$ = (0 , T)
$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$ = (- mg senθ , T- mg cosθ).

Así pues, obtenemos: F_t = - mg senθ

A.3. *Comprobad que la expresión obtenida en la actividad anterior delata que, para pequeños ángulos el movimiento de oscilación del péndulo es asimilable a un movimiento armónico simple (MAS).*

Si el ángulo θ es pequeño, L senθ es muy aproximadamente igual a la longitud del arco "x" y esta coincidencia, como puede visualizarse en la figura siguiente, será tanto más grande cuanto menor sea el ánguloθ. Matemáticamente podríamos decir que, conforme el ángulo de oscilación va disminuyendo (curvas punteadas de color negro de la figura), la longitud del cateto opuesto (segmentos punteados coloreados en azul) se va haciendo más igual a la longitud x del arco correspondiente.



Así pues, para ángulos pequeños, podemos admitir que x = Lsenθ o lo que es equivalente: senθ = x/L de modo que sustituyendo en la expresión de F_t anterior, obtenemos:

F_t = - mg· x/L → m·a_t = - mg· x/L

Por tanto, la aceleración tangencial será: $a_t = -\frac{g}{L} \cdot x$

Como la gravedad, g, y la longitud del péndulo, L, son constantes, vemos que, efectivamente, dicha aceleración es directamente proporcional a la elongación y de signo contrario y, por tanto, el movimiento oscilatorio del péndulo (para pequeñas oscilaciones), se puede considerar como un movimiento armónico simple.

A.4. *Obtened la expresión del periodo de oscilación de un péndulo simple (para ángulos pequeños), en función de su longitud.*

La ecuación de la posición de un MAS es: x = A sen (wt + φ_0)

Derivando dos veces sucesivas con respecto al tiempo, se obtiene la expresión de la aceleración sobre la trayectoria:

$$a = -A \cdot w^2 \text{ sen } (wt + \varphi_0) \;\rightarrow\; a = -\, w^2\, x \quad (1)$$

Por otra parte, en la actividad anterior hemos visto que, para pequeñas oscilaciones, la aceleración tangencial de la bolita del péndulo es:

$$a_t = -\frac{g}{L} \cdot x \quad (2)$$

Por tanto, igualando (1) a (2), se obtiene: $w^2 = \frac{g}{L}$ (3)

Por otra parte, sabemos que *w* es la frecuencia angular del MAS y que se relaciona con el periodo, T, mediante la expresión:

$$w = 2\pi/T \quad (4)$$

Elevando al cuadrado la expresión (4) e igualando a (3): $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{L}$

De donde obtenemos la expresión buscada, sin más que despejar T:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Como vemos, esta expresión es coherente con la que se obtuvo en el trabajo práctico de forma experimental ($T = C \cdot \sqrt{L}$) y nos dice que la constante allí obtenida es:

$$C = 2\pi/\sqrt{g}\ .$$

ANEXO 2

INFLUENCIA DE LA MASA EN EL PERIODO DEL PÉNDULO

En el desarrollo realizado en el anexo 1 para obtener el periodo del péndulo simple, hemos omitido deliberadamente toda alusión a los conceptos de masa inercial y masa gravitatoria. Así suele hacerse de manera habitual, de forma que dicho desarrollo conduce a una expresión del periodo en la que no aparece la masa de la bolita o, mejor, dicho, a la que se llega después de que se cancele la doble influencia de esta magnitud.

Veamos ahora unas actividades que pueden ayudar a que se preste una atención explícita a estos importantes conceptos. Para su realización, se supone que los alumnos ya han trabajado antes con ellos, por ejemplo, al estudiar el movimiento de caída de graves:

A.1 *Identificad en las expresiones de la fuerza resultante y de la aceleración del péndulo simple la influencia de la masa inercial y de la masa gravitatoria. Explicad el significado físico de estas expresiones en relación con tales conceptos de masa.*

La masa que aparece en la expresión de la fuerza resultante es la masa gravitatoria, ya que dicha fuerza resultante se obtiene sumando el peso de la bola o fuerza gravitatoria que se ejerce sobre ella y la tensión que le ejerce la cuerda:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{T}$$

Esta expresión indica que cuanto mayor sea la masa gravitatoria de la bolita del péndulo, mayor es la fuerza que se ejerce sobre ella, ya que, obviamente, es también mayor su peso y mayor será la tensión de la cuerda.

Trabajando en componentes intrínsecas, podemos expresar la fuerza resultante (ved A.1 del anexo 1) como:

$$\vec{F}_{res} = (- m_g \cdot g \operatorname{sen}\theta \ , \ T - m_g \cdot g \cos\theta).$$

Por otra parte, el módulo de la aceleración de la bolita se obtiene dividiendo el de dicha fuerza resultante entre su masa inercial:

$$a = F_{res}/m_i$$

Lo que indica que cuanto mayor sea la masa inercial (o la inercia) de la bolita, menor será la aceleración que dicha bolita adquiere al ser sometida a cualquier fuerza.

A.2 *Deducid la expresión del módulo de la aceleración tangencial del péndulo y la de su periodo, e interpretad la influencia de las masas inercial y gravitatoria en ambas magnitudes.*

El módulo de la aceleración tangencial depende doblemente de ambas masas, según la expresión:

$$a_t = \frac{F_t}{m_i} = \frac{m_g \cdot g \cdot sen\theta}{m_i}$$

Recordando que, para ángulos pequeños, podemos admitir que x = L· senθ o lo que es equivalente: senθ = x/L el módulo de la aceleración tangencial es:

$$\boxed{a_t = -\frac{g}{L} \cdot x \frac{m_g}{m_i}}$$

Es decir, la aceleración tangencial del péndulo es proporcional a la masa gravitatoria e inversamente proporcional a la masa inercial. Un péndulo de mayor masa (gravitatoria) es más atraído por la Tierra y, como consecuencia de ello, oscila con mayor aceleración. Al mismo tiempo, un péndulo de mayor masa (inercial) adquiere menor aceleración sometido a una determinada fuerza gravitatoria.

No habiendo eliminado estas dos magnitudes en la expresión de la aceleración, ambas también aparecen en la expresión del periodo: En efecto:

Sabemos que en un MAS se ha de cumplir que: $a_t = - w^2$ x. Igualando esta expresión a la anterior:

$$-w^2 \cdot x = -\frac{g}{L} \cdot x \frac{m_g}{m_i} \rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g \cdot m_g}{L \cdot m_i} \rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L \cdot m_i}{g \cdot m_g}}}$$

El resultado obtenido muestra que cuanto mayor sea la masa inercial del péndulo, mayor debería ser su periodo, mientras que cuanto mayor sea la masa gravitatoria del mismo péndulo, menor debería ser su periodo. No obstante, si seguimos analizando dicho resultado, vemos que, debido a la equivalencia existente entre ambas masas, sus efectos se compensan (una está en el numerador y la otra en el denominador), de modo que la influencia resultante es nula y, en consecuencia, péndulos de distinta masa pero igual longitud, oscilan siempre con la misma aceleración y también con el mismo periodo.

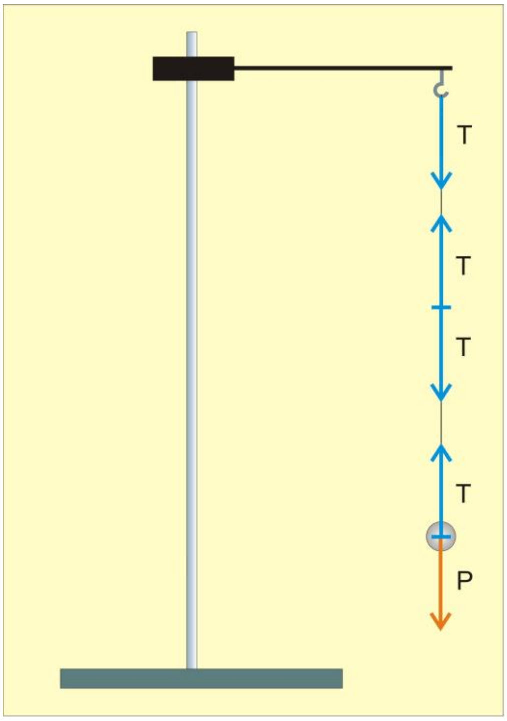
ANEXO 3.

ACTIVIDADES DE REFUERZO SOBRE DINÁMICA DEL PÉNDULO SIMPLE

A continuación vamos a sugerir algunas actividades de refuerzo sobre la aplicación de los principios de la dinámica newtoniana al péndulo simple, destinadas específicamente a que los estudiantes interpreten correctamente las fuerzas que se ejercen en diferentes situaciones (péndulo estático, péndulo oscilando...)

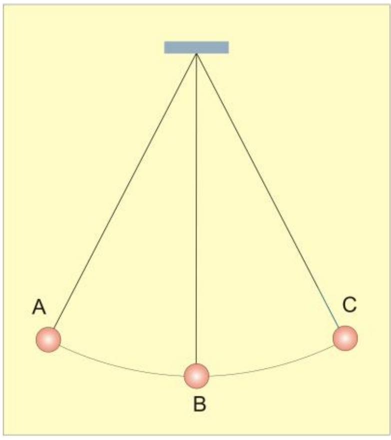
A.1. *Un péndulo simple cuelga verticalmente en reposo. Identificad las diferentes fuerzas que se ejercen sobre el soporte (ganchito), la cuerda y la bolita del péndulo.*

Al colgar un péndulo simple de un ganchito y dejarlo descansar en reposo en posición vertical (tal como muestra el dibujo adjunto), se ejercen todas las fuerzas indicadas en el esquema. Por una parte, sobre la bolita se ejerce la fuerza de atracción de la Tierra (fuerza peso "**P**", vertical y hacia abajo) y, como consecuencia de ello, la bolita tira de la cuerda hacia abajo, de modo que, de acuerdo con el principio de acción y reacción, la cuerda también tirará de la bolita hacia arriba con una fuerza igual y de sentido contrario, que llamamos tensión "**T**". Dado que la cuerda se considera inextensible y de masa despreciable, la tensión es la misma en todos sus puntos y, por tanto, en la interacción entre el ganchito y la cuerda, esta tira del ganchito con una fuerza de módulo T hacia abajo y el ganchito tira de ella con otra fuerza del mismo módulo y sentido contrario[1]. La bolita permanece en reposo al ser nula la suma de las dos fuerzas que se ejercen sobre ella (**P** y **T**), y la cuerda queda tensa, debido a las dos tensiones que se ejercen sobre ella en sentidos opuestos (que hemos representado, aplicadas en su centro de masas).



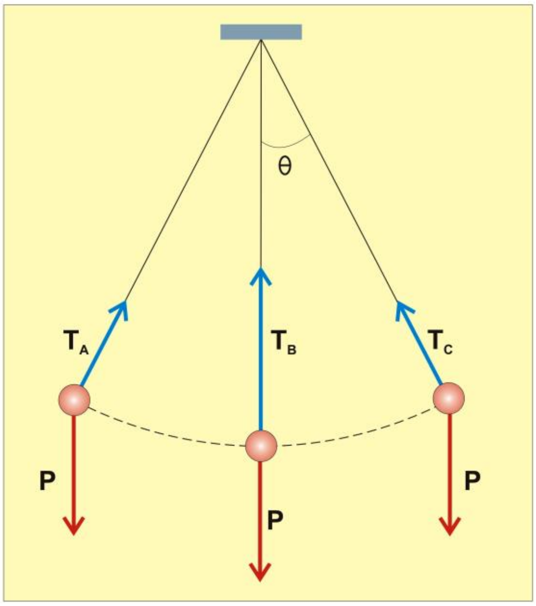
[1] Hemos optado aquí por representar los vectores en negrilla y su módulo en letra normal

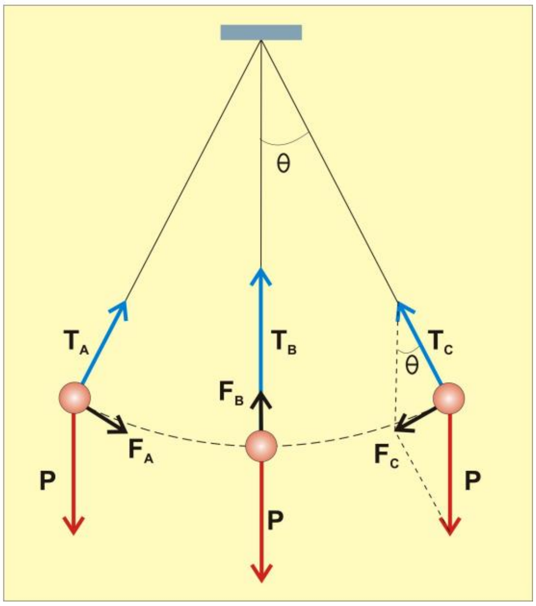
A.2. *En la figura siguiente se muestra un péndulo oscilando entre las posiciones extremas A y C. Se pide:*



a) *Representad las fuerzas que actúan sobre la bola en cada una de esas tres posiciones.*
b) *Razonad hacia dónde va la aceleración cuando la bolita pasa por el punto medio B*
c) *Representad la fuerza resultante en cada una de las tres posiciones.*
d) *Obtened el módulo de la tensión T, en las posiciones A, B y C*

Cuando resuelven el apartado a), muchos alumnos igualan en la posición B a las dos fuerzas que se ejercen sobre la bolita (el peso, **P**, y la tensión del hilo, **T**). Esta respuesta errónea se produce porque tienden a trasladar a este problema la solución que ellos ya conocen de la situación planteada en la *A.1*, que no es equiparable a la que se plantea ahora. En efecto, si la bolita estuviera en la posición B **en reposo**, entonces sí serían de la misma intensidad las dos fuerzas (**P** y **T**), porque como acabamos de ver, en ese caso, la aceleración de la bolita sería cero. Sin embargo, mientras la bolita oscila, su trayectoria es curvilínea y, por tanto, el movimiento ha de ser necesariamente acelerado. En este movimiento, la fuerza peso no cambia, pero la tensión del hilo sí va cambiando y, lógicamente, toma su valor máximo en la posición más baja de la bolita (cuando se mueve con la máxima velocidad) y su valor mínimo en los extremos (A y C).





En cualquier punto, de la trayectoria se ha de cumplir que **F** = **P**+**T** donde **F** es la fuerza resultante sobre la bolita. En la posición B, la tensión es mayor que el peso. En ese punto, **F** será vertical y hacia arriba y su módulo vendrá dado por: $F_B = T_B - P$.

Si trabajamos con componentes intrínsecas, y tomamos como sentido positivo hacia la derecha (para la componente tangencial) y hacia el punto de sujeción del hilo (para la componente normal), podemos expresar la fuerza resultante en cualquier punto de la trayectoria como:

$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{T} = (-mg\text{sen}\theta\ ,\ -mg\cos\theta) + (0\ ,\ T) \rightarrow \mathbf{F} = (-mg\text{sen}\theta\ ,\ T - mg\cos\theta)$

Con lo que la expresión para el vector aceleración será: $\mathbf{a} = \left(-g\text{sen}\theta\ ,\ \dfrac{T - mg\cos\theta}{m}\right)$

¿Cuál sería la aceleración en el instante en que la bolita pasa por su posición más baja?

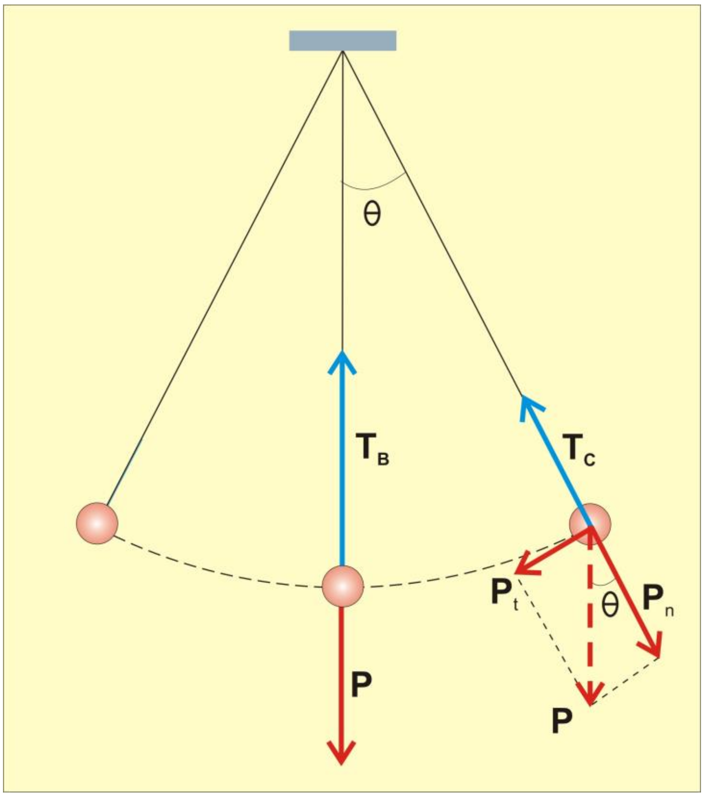
En la posición más baja (B), ocurre que $\theta = 0$, con lo que: sen $\theta = 0$ y cos $\theta = 1$.

Sustituyendo en la expresión del vector aceleración, obtenemos:

$$\mathbf{a}_B = \left(0\ ,\ \frac{T - mg}{m}\right) \rightarrow \boxed{a_B = \frac{T - P}{m}}$$

El resultado anterior nos muestra, que el vector aceleración en B tiene dirección vertical y sentido hacia arriba (lo mismo, claro está, que $\mathbf{F}_B$) y que su módulo en ese punto coincide con su componente normal (ya que la componente tangencial en ese punto es nula).

Para calcular el módulo de la tensión en un extremo, utilizaremos la figura siguiente:



En la posición C, hemos descompuesto la fuerza peso en sus componentes tangencial (**P**$_t$) y normal (**P**$_n$). Dado que se trata de una posición extrema, en ese preciso instante la velocidad es nula, por lo tanto, la aceleración normal (v^2/L) también lo será, con lo que:

$$T_C - P_n = 0 \;\rightarrow\; T_C = P_n = mg\cos\theta$$

Y por simetría, lo mismo ha de ocurrir en la posición A, con lo que: $T_A = mg\cos\theta$

Sin embargo, como ya hemos visto, en B la aceleración normal no es nula sino que, toma su valor máximo (puesto que en B la velocidad también es la máxima). Por tanto, en B:

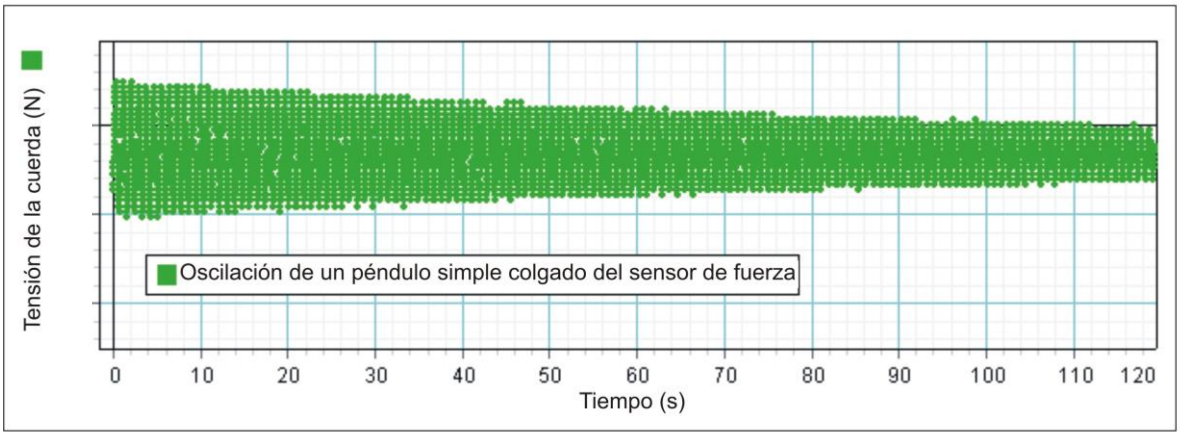
$$T_B - P = m\cdot a_n \rightarrow T_B = mg + m\cdot a_n$$

Como la aceleración normal nunca puede tomar valores negativos, concluimos que la tensión del hilo en B, toma su valor máximo.

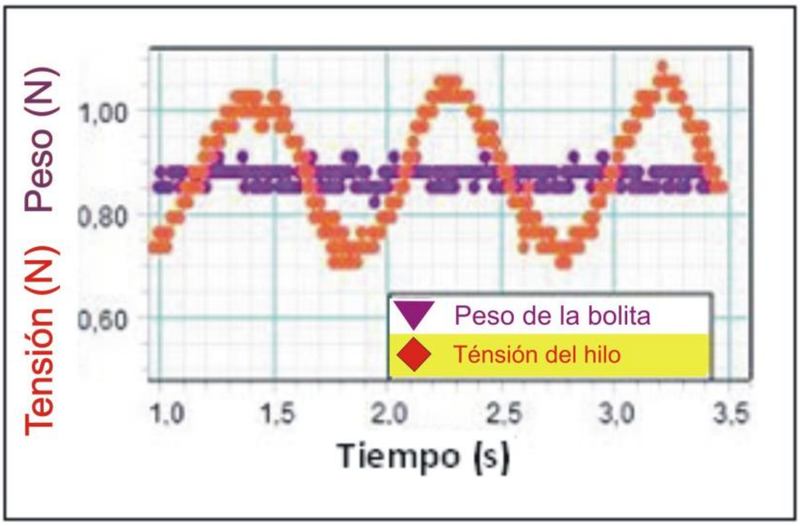
En cualquier otro punto intermedio entre B y cualquiera de los extremos, la aceleración normal no es nula, pero tampoco alcanza su valor máximo. Por tanto, cabe concluir que durante el movimiento de la bolita, la tensión del hilo oscila entre un valor máximo y un valor mínimo.

A.3. *Colgad un péndulo simple de un sensor de fuerza y hacedlo oscilar. ¿Qué fuerza mide el sensor? ¿Cómo evolucionará dicha fuerza durante el movimiento del péndulo?*

Habiendo realizado las actividades anteriores, los alumnos no tienen mayor dificultad para precisar que la fuerza que mide el sensor es la tensión, **T**, y también prevén sin mayores problemas su evolución. Nos remitimos aquí otra vez a la gráfica que hemos mostrado en el desarrollo del trabajo práctico, en la que se dejó oscilar al péndulo durante bastante tiempo. Dicha representación permite constatar las oscilaciones de la tensión y también muestra que, a medida que el movimiento se va amortiguando, los valores máximos y mínimos de dicha tensión se van aproximando entre sí.



Si se utiliza esta experiencia con el propósito específico de reforzar estos conceptos, resulta instructivo pedir a los alumnos que midan también con el mismo sensor el peso del péndulo y que construyan una gráfica incorporando esta magnitud, junto con la tensión medida por el propio sensor cuando oscila el péndulo. Se obtiene entonces una gráfica como la siguiente:



La gráfica, como puede verse, corresponde a poco más de una oscilación del péndulo y muestra que los valores máximos y mínimos entre los que oscila el valor de la tensión son equidistantes con respecto al valor del peso (que permanece constante).

ANEXO 4

OBTENCIÓN EXPERIMENTAL DE LA GRAVEDAD

A continuación vamos a utilizar los conocimientos aprendidos para diseñar y llevar a cabo algún procedimiento sencillo con el que calcular el valor de la intensidad del campo gravitatorio terrestre en el lugar donde nos encontremos.

A.1. *Sugerid algún procedimiento sencillo para calcular de forma aproximada el valor de la intensidad del campo gravitatorio terrestre.*

Una posibilidad es utilizar un péndulo simple del que conocemos su longitud y medir experimentalmente el periodo de oscilación (para un ángulo pequeño). Despejando de la expresión de T que se ha deducido en el anexo anterior:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g = \frac{4\pi^2 \cdot L}{T}$$

Los alumnos pueden hacer la experiencia varias veces y usar esta expresión en cada una de ellas, para hallar luego el valor medio de g.

A.2. *Pensad otra posible manera de obtener g aprovechando los resultados del experimento en el que se estudia la influencia de la longitud en el periodo del péndulo.*

Se pueden aprovechar los resultados de dicho experimento para obtener diferentes valores de g. Así, por ejemplo, la tabla siguiente muestra valores de la aceleración de la gravedad que se pueden calcular partiendo de cada valor experimental del periodo obtenido en uno de los experimentos que se han relatado en el desarrollo del trabajo práctico. Ahora bien, como en este caso, los diferentes valores de g no proceden de diversas mediciones realizadas con un mismo péndulo, sino que para cada una se utiliza un péndulo de diferente longitud, no procede obtener un valor representativo de g, calculando la media de estos valores.

Periodo (s)	Gravedad (m/s^2)
0.65	9.34
0.79	9.49
0.90	9.75
1.01	9.68
1.10	9.78
1.20	9.59
1.27	9.79
1.34	9.89
1.42	9.79
1.50	9.65
1.55	9.86
1.62	9.90
1.67	9.91

En lugar de hacer esto, es más correcto utilizar la gráfica de T^2 en función de L, de la página 15. Allí concluimos que la relación entre T y L era del tipo:

$$T = C \cdot \sqrt{L}$$

Donde C era una constante cuyo valor se conoce a partir de la pendiente “m” de la recta obtenida al representar gráficamente los datos experimentales de T^2 frente a la longitud L del péndulo y cuya ecuación viene dada por $T^2 = m \cdot L$.

En efecto: $T^2 = m \cdot L \rightarrow T = \sqrt{m} \cdot L \rightarrow C = \sqrt{m}$ (1)

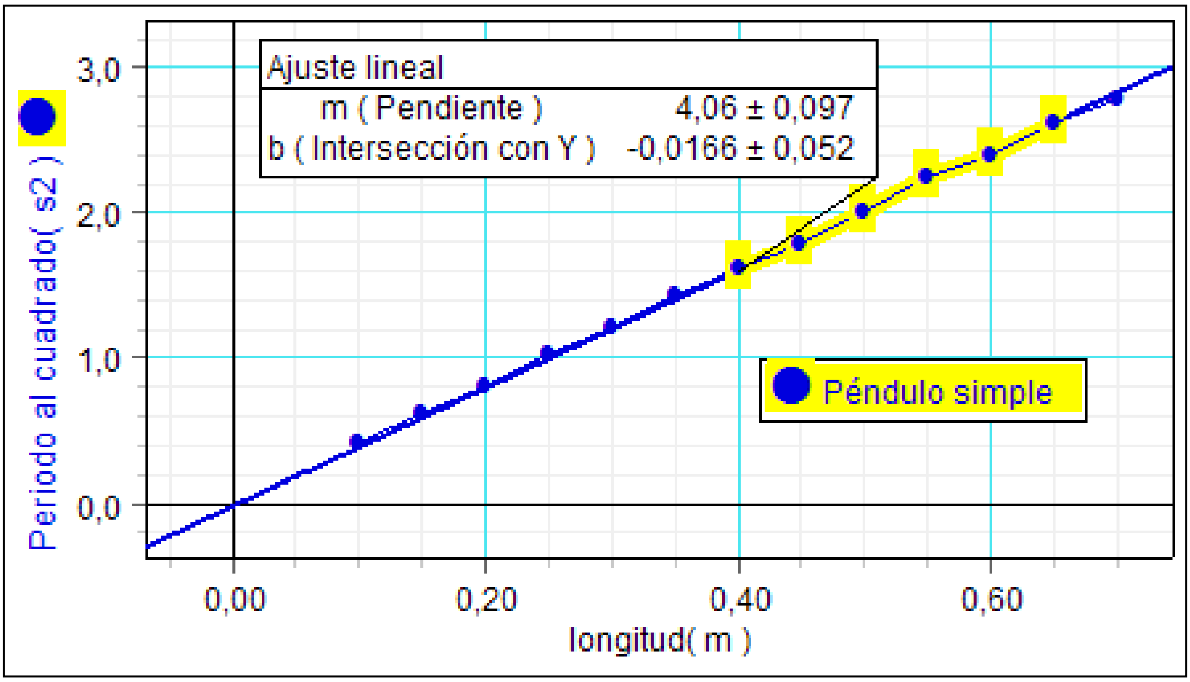
Por otra parte, en el anexo 1, al deducir teóricamente la expresión del periodo de un péndulo simple, vimos (página 20) que:

$$C = \frac{2\pi}{g} \quad (2)$$

Igualando las dos expresiones (1) y (2), se obtiene que: $\boxed{g = \frac{4\pi^2}{m}}$

Por otra parte, si el experimento se realiza con el sensor de fuerza, se puede usar su software, además de para facilitar la realización de estas operaciones, para optimizar el resultado.

En efecto, cuando en el experimento relatado los alumnos usaron todos los valores experimentales, la pendiente *m* resultó (como hemos visto en el trabajo práctico) igual a *3.98* s^2/m, y esto daría un valor de *g* igual a $9.92 m/s^2$. Sin embargo, éste no es el mejor valor de g que se puede obtener a partir de los resultados experimentales y ello puede verse manipulando de forma inteligente la gráfica. Se trata de seleccionar conjuntos más reducidos de puntos de la misma, buscando aquellos para los que la recta que los ajusta pase más próxima al origen (ya que la ley es $T^2 = m \cdot L$). Siguiendo este criterio, los alumnos seleccionaron en este caso el conjunto de puntos que muestra la gráfica de la página siguiente (quedan resaltados en amarillo). Como se ve, al hacerlo la pendiente resulta $4.06\ s^2/m$ y se obtiene un valor de *g* igual a $9.72 m/s^2$.



ANEXO 5

ESTUDIO DEL PÉNDULO SIMPLE USANDO UN PROGRAMA DE SIMULACIÓN

Se puede realizar un análisis teórico-experimental del movimiento del péndulo simple utilizando un programa que combine videos con la simulación del movimiento. Con dicho análisis se comprueba que para pequeñas oscilaciones el movimiento es asimilable a un movimiento armónico simple (MAS) y también se puede obtener un valor correcto de la gravedad. Dos ejemplos de programas gratuitos que dan esta posibilidad son *Modellus* (versión 2.5 en ordenadores de 32 bits y versión 3 en ordenadores de 64 bits) y *Tracker*. El manejo de ambos programas es muy sencillo y totalmente adecuado para los alumnos.

1. Estudio del péndulo simple con el programa *Modellus*

La siguiente secuencia de actividades reproduce un trabajo de estas características, que realizaron alumnos de 1º Bachillerato con el programa *Modellus* en el instituto “Leonardo da Vinci” de Alicante. Antes de enfrentarse a ellas habían realizado el trabajo práctico sobre el péndulo simple.

A.1. *¿Qué puede aportar un análisis experimental del movimiento de un péndulo simple, asistido por el programa Modellus? Decid cuál será la primera actividad que convendría realizar para iniciar dicho estudio, precisad su diseño y llevarla adelante.*

Si los alumnos ya han hecho otros análisis similares con este programa (véanse, por ejemplo, los trabajos prácticos anteriores sobre la caída de graves), saben que se trata de crear una animación en la que se combine una filmación del movimiento con una simulación del mismo. Mediante la comparación entre el movimiento real (filmado) y el virtual (simulado), se intentará comprobar si el movimiento real de la bolita es asimilable a un MAS (para oscilaciones de pequeña amplitud) y también se intentará contrastar el valor de la gravedad.

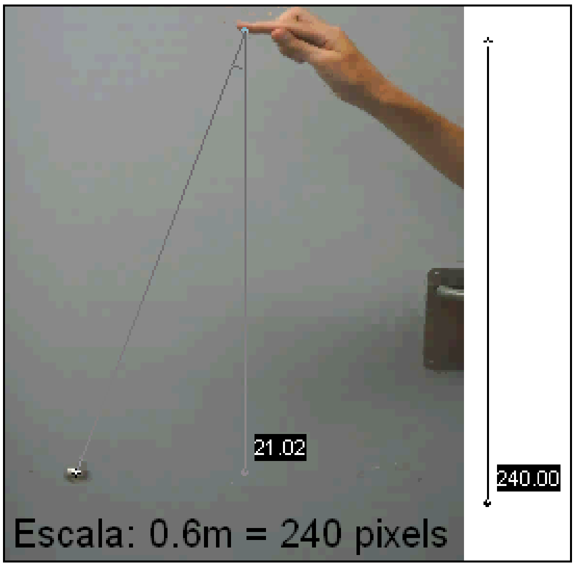
Una vez se han explicitado los objetivos anteriores, los alumnos saben que lo primero que hay que hacer es filmar el movimiento y proceden a precisar un diseño experimental adecuado para ello. Han de preparar un péndulo de una longitud determinada (en este caso, fue $L = 60\ cm = 0.6\ m$), y han de asegurarse de que la bolita sea bien visible a la cámara mientras oscila. Como el análisis se basa en la comparación entre el movimiento filmado y una simulación del mismo, el diseño también ha de prever el señalamiento de una longitud conocida, visible a la cámara, para que sirva de referencia. En general, esta longitud se puede indicar haciendo dos marcas en una pizarra pero, en este caso, no es necesario, puesto que sirve la propia longitud del péndulo, que se debe haber fijado previamente con la mayor exactitud posible. La imagen siguiente procede del video que filmaron los alumnos después de precisar estos detalles.

A.2. *Preparad el video para su inserción en una animación del programa Modellus.*

Se filmó un video bastante largo, que incluyó varias oscilaciones del péndulo. Pero, para realizar la animación interesaba tener un tramo más corto, que incluyera un número pequeño de oscilaciones y en el que el movimiento comenzara en una posición bien determinada (por ejemplo, en una de las dos posiciones extremas en las que la amplitud es máxima). Por tanto, los alumnos recortaron el video inicial, hasta obtener un clip que correspondió a una oscilación completa, iniciada en la posición de máxima amplitud.

A.3. *Volcad el clip de video en una página en blanco de Modellus, determinad la equivalencia entre metros y píxeles en la pantalla y estableced los valores de los parámetros del movimiento en ambas unidades.*

Para poder volcar el clip de video en una página del programa *Modellus*, éste ha de estar en formato AVI. Por tanto, si la cámara con la que se filma no trabaja en dicho formato, lo primero que han de hacer los alumnos es usar programa libre de tratamiento de videos para transformar el clip al mismo (en Internet existen muchas aplicaciones de libre disposición que permiten realizar rápidamente esta tarea).

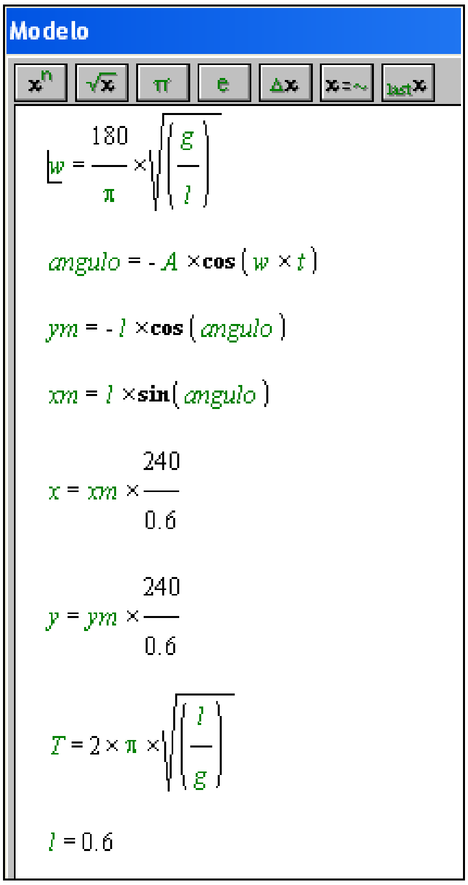


Por otro lado, una vez volcado el clip en una página de *Modellus* vacía, el programa dispone de varias herramientas para medir magnitudes en la misma pantalla. En este caso, los alumnos usaron la herramienta de medida de ángulos y la de longitudes. Como se ve, con la primera obtuvieron el ángulo inicial o amplitud de la oscilación (*21.02º*) y con la segunda obtuvieron la longitud aparente del péndulo en la pantalla (*240 píxeles*). Teniendo en cuenta que, en este caso, la longitud real del péndulo era de *60 cm*, establecieron la equivalencia entre *m* y *píxel*.

A.4. *Escribid el modelo físico matemático de la animación. Colocad seguidamente en la pantalla una bolita que reproduzca el movimiento teórico, ajustado a dicho modelo. Añadid otros elementos que puedan ser útiles para el análisis experimental que se pretende realizar.*

El modelo físico-matemático de la simulación lo conforman las ecuaciones del movimiento de la bolita del péndulo. Al escribir estas ecuaciones se puede optar por expresar el ángulo en radianes o en grados. En este caso, se eligió esta segunda opción, ya que el ángulo inicial conocido se había medido también en grados.

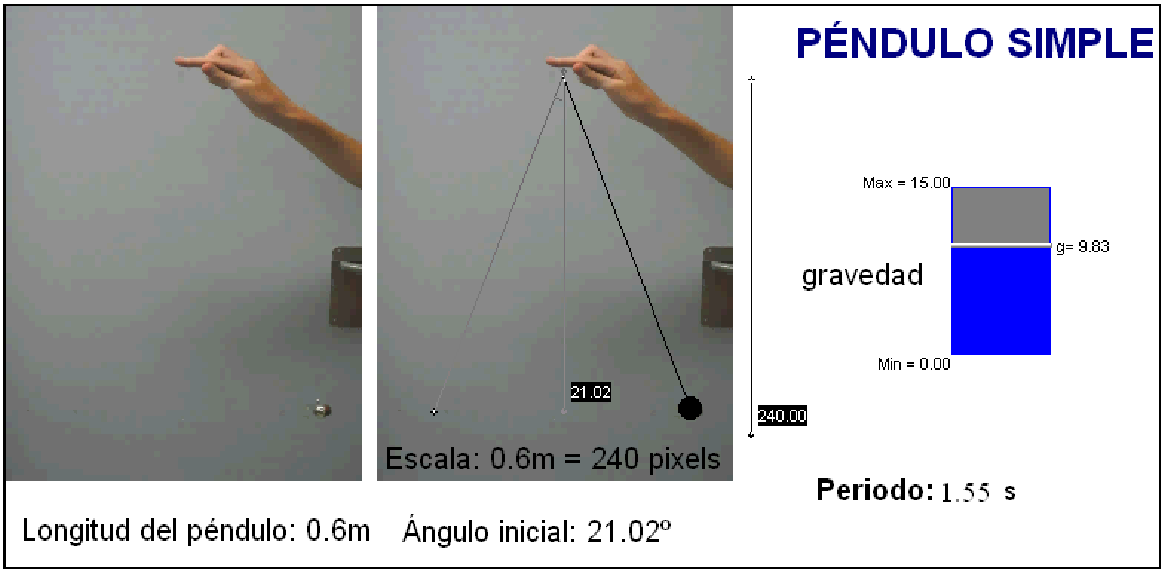
En otros casos más sencillos (como, por ejemplo, movimientos rectilíneos), los estudiantes pueden escribir sin ninguna ayuda las ecuaciones del movimiento. En este, como las coordenadas que dan la posición de la bola virtual tienen que ser cartesianas, y el movimiento es curvilíneo, necesitan una pequeña ayuda del profesor. Puede prestársela preguntándoles cómo tiene que variar el ángulo si el movimiento es armónico simple. Una vez comprenden que su ecuación también ha de ser la de un MAS, ellos mismos pueden escribir la expresión de dicho ángulo y, seguidamente se ha de proyectar dicho ángulo sobre los ejes horizontal y vertical, para obtener las ecuaciones de las coordenadas de posición buscadas (*xm*, *ym*). El resto del modelo (expresión del periodo y de la pulsación del péndulo, así como la conversión de unidades entre *píxeles* y *metros*) no ofrece mayor dificultad y lo pueden escribir los alumnos directamente.



Una característica fundamental del modelo que se adopta es el hecho de dejar la gravedad como una magnitud variable, lo que es requisito para luego poder contrastar cuál es el valor de g para el que exista concordancia entre el movimiento real y la simulación. Por tanto, las condiciones iniciales del movimiento corresponden a cuál sea el ángulo inicial y cuál sea el valor de la gravedad. Para determinar esto último de una forma activa al manipular la animación, los alumnos incorporaron también a la pantalla un controlador manual que permite atribuir a g el valor que se desee, y modificarlo sobre la marcha en cualquier instante del movimiento.

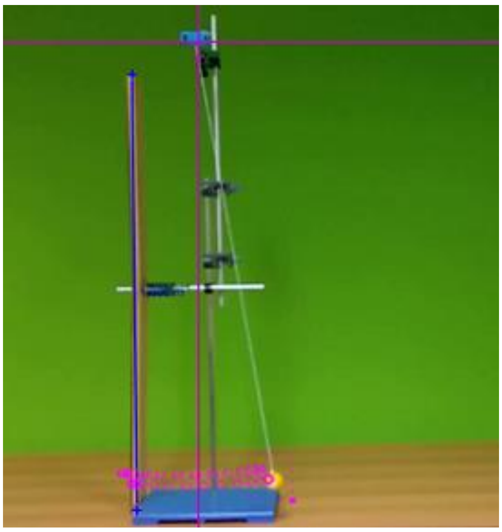
A.5. *Terminada de construir la animación, hacedla correr y proceded a contrastar las hipótesis acerca del tipo de movimiento y a determinar el valor de g.*

Cuando corre la animación, se observa con gran satisfacción (figura adjunta situada debajo) que el movimiento real (que sigue la imagen de la bolita filmada) y el teórico o virtual (que sigue la bola negra) tienen la mayor concordancia para un valor de la gravedad en el entorno de $9.8\ m/s^2$ (de hecho esta concordancia hace que en la imagen de la derecha, en la que se observa el resultado del análisis, no se vea la bolita real, porque a lo largo de todo el movimiento queda tapada por la bola virtual negra). Como vemos en la imagen, los alumnos fijaron el cursor en el valor teórico de $g = 9.83\ m/s^2$, si bien hay que decir que este análisis tiene una imprecisión entre un 5% y un 10%, por lo que una pequeña variación del valor de g que no supere estos márgenes no afecta visiblemente al resultado. Pero, si se sobrepasa este margen, sí se observa con total claridad que entonces la pelota real y la virtual se mueven de forma desacompasada.



2. Estudio del péndulo simple con el programa *Tracker*

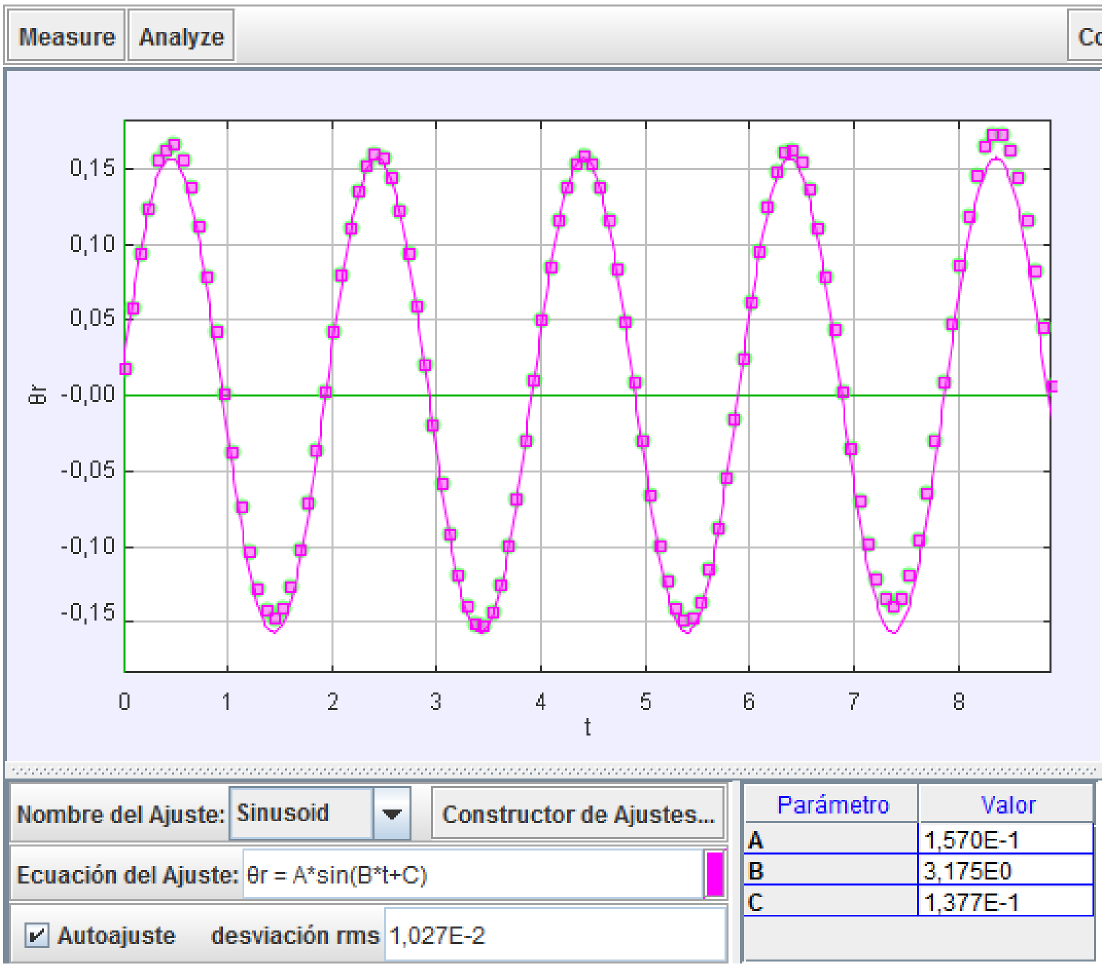
Vamos a mostrar ahora resultados de un estudio realizado con este programa en el Cefire CTEM de Valencia. Para el mismo se montó un péndulo con un apoyo vertical, un hilo de poca masa e inextensible y una esfera de material denso (m=53’24 g). La longitud del péndulo fue 96,5cm y junto a él, se colocó una regla (de 1m de longitud) para calibrar la imagen en la pantalla.



Después de desplazar ligeramente la esfera de la posición vertical y soltarla para generar oscilaciones de pequeña amplitud, se filmó el movimiento. Seguidamente se realizó un análisis previo de las imágenes con el propio programa Tracker, con objeto de seleccionar un intervalo de tiempo en el que se observaron las oscilaciones más simétricas. Finalmente, se realizó la conversión entre *pixeles* y *m* (usando como dato de referencia la longitud de la regla) y se escribió el modelo físico-matemático de la simulación.

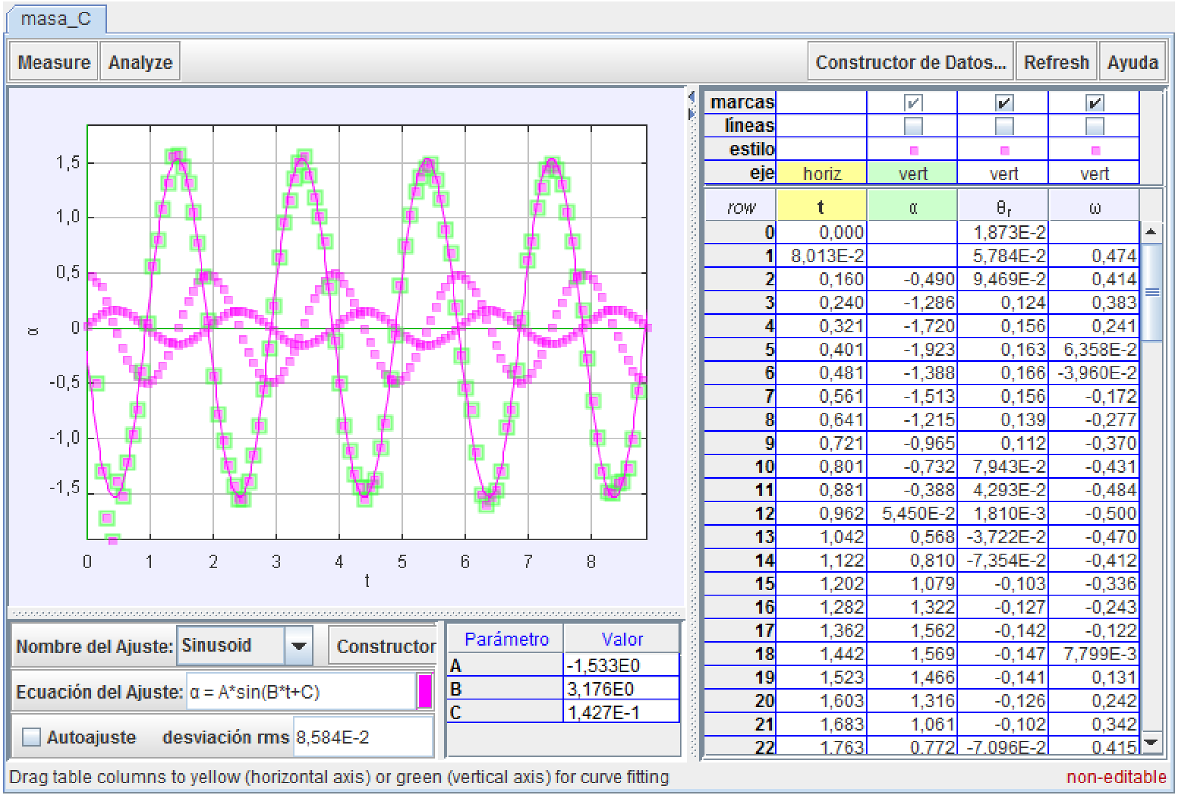
Tras llevar adelante estos procesos, se realizaron diversos análisis, obteniendo, entre otros, los siguientes resultados:

Gráfica del movimiento



Esta representación puede servir para mostrar a los alumnos que usando magnitudes angulares para expresar la posición del péndulo (en este caso, el ángulo en radianes), la gráfica del movimiento es similar a la que podría obtener usando magnitudes lineales (la posición expresada, por ejemplo, en cm).

Gráficas de la posición, velocidad y aceleración angular



En la figura anterior se representan el ángulo ϴ respecto de la vertical (rad), la velocidad angular *w* (rad/s) y la aceleración angular α (rad/s^2). Los puntos experimentales ajustados a la función matemática sinusoidal corresponden a los valores de aceleración angular (sombreados en verde). Al haber incorporado en la misma representación a las tres magnitudes (posición, velocidad y aceleración angular), los estudiantes pueden comprobar los desfases existentes entre ellas. Así, cuando el péndulo pasa por la posición vertical (ángulo igual a cero), la velocidad angular es máxima y viceversa.

En la tabla de datos de la figura anterior se puede observar, por ejemplo, el punto de la fila18 para tiempo 1,442 s y cómo en dicho punto, se cumple que la desviación angular respecto de la posición de equilibrio es máxima en sentido negativo (θ= - 0,147 rad), la velocidad angular es prácticamente nula (ω= 0,0078 rad/s), y la aceleración angular es máxima (α= 1,569 rad/s^2).

En la tabla siguiente se muestran los resultados del análisis de los datos de las tres magnitudes angulares estudiadas para el péndulo.

Magnitud	Ecuación teórica	Ajuste puntos experimentales
θ	$\theta = \theta_{max} \cdot \sin(w \cdot t + \varphi)$	$\theta = 0{,}157 \cdot \sin(3{,}175 \cdot t + 0{,}1377)$ [rad]
ω	$\omega = \theta_{max} \cdot w \cdot \cos(w \cdot t + \varphi)$	$\omega = 0{,}4886 \cdot \cos(3{,}177 \cdot t + 0{,}1319)$ [rad/s]
α	$\alpha = -\theta_{max} \cdot w^2 \cdot \sin(w \cdot t + \varphi)$	$\alpha = -1{,}533 \cdot \sin(3{,}176 \cdot t + 0{,}1428)$ [rad/s^2]

Estos valores permiten calcular la frecuencia angular del movimiento supuesto MAS (Movimiento Armónico Simple) w=3,176 rad/s y aplicando la expresión del péndulo simple, conocida la longitud (L) del péndulo, calcular la intensidad del campo gravitatorio.

En este caso: $g = L \cdot w^2 = 0{,}965 \cdot 3{,}176^2 = 9{,}73$ N/kg

ANEXO 6

PÉNDULO DE FOCAULT

La explicación del llamado péndulo de Foucault es una demostración concluyente de la rotación de la Tierra. Se trata de un montaje que suele verse ¿y entenderse? En muchos Museos de la Ciencia.

A.1. *Una de las propiedades que tiene el péndulo simple es que, si no existen perturbaciones externas, cuando se separa de su posición de equilibrio y se le suelta siempre oscila en el mismo plano, ya que la fuerza peso de la bolita siempre va dirigida hacia el centro de la Tierra, y no puede cambiar el plano de oscilación. Interpretad las consecuencias de esta propiedad en el caso de un péndulo situado en uno de los polos terrestres, de tal forma que su eje de oscilación coincida con el de rotación de la Tierra, y en el caso de otro situado en el ecuador.*

Sabemos que durante muchos siglos, la mayoría de la gente pensaba que la Tierra permanecía inmóvil en el centro del Universo y que el Sol, la Luna, el resto de los planetas conocidos y todas las estrellas, giraban a su alrededor describiendo circunferencias concéntricas con un movimiento regular, como así parece sugerirlo la trayectoria que dichos astros describen de manera sistemática en el cielo. Así, el Sol, cada día daría una vuelta completa alrededor de la Tierra saliendo por el E y poniéndose por el O, etc.

En 1543, Copérnico expuso su Teoría Heliocéntrica, según la cual era el Sol y no la Tierra, el centro del Universo, siendo esta última la que, debido a su movimiento de rotación en torno a su eje de O a E, provocaba el fenómeno de los días y las noches y hacía que pareciese que el Sol se movía sobre nuestras cabezas de E a O.

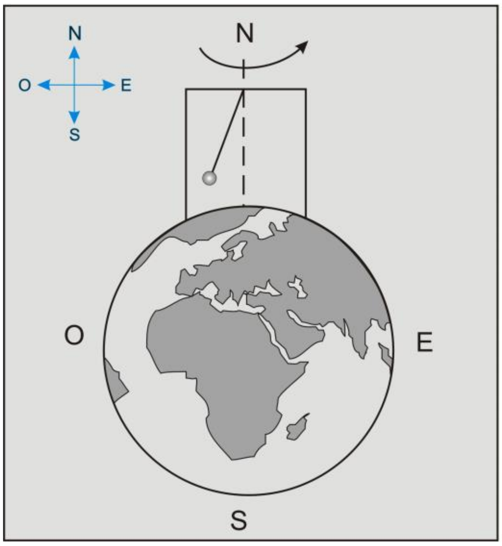
La teoría de Copérnico, no fue aceptada por la Iglesia de su tiempo, sino condenada como una herejía. En 1851, el físico francés Foucault ideó un péndulo para evidenciar la rotación de la Tierra en torno a un eje imaginario que la atravesara de N a S. El experimento se basa en la propiedad del péndulo simple de oscilar siempre en el mismo plano. En una de sus demostraciones, Foucault utilizó un hilo de 67 m y una bala de cañón de 28 kg. Aunque el plano de oscilación del péndulo no puede girar, el hecho de que la Tierra gire sobre sí misma, hace que parezca que dicho plano de oscilación cambia respecto a los observadores que lo miran (situados, claro está, sobre la superficie terrestre), de manera que si dispusiéramos de un péndulo así en un recinto, un observador situado sobre la bola del péndulo de Foucault, vería girar el recinto a su alrededor, es decir, vería cómo gira la Tierra.

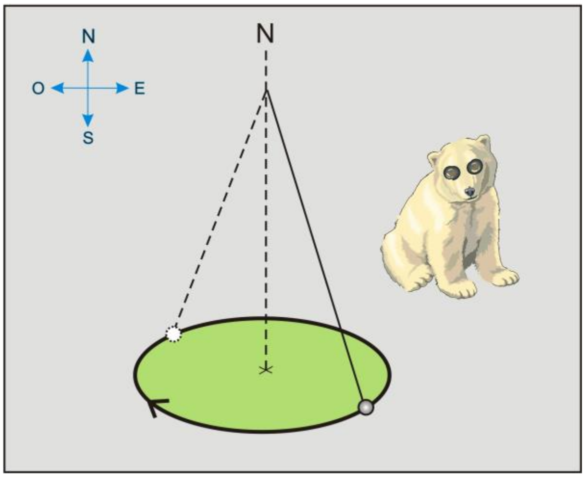
A.2. *¿Qué ocurriría si dispusiéramos un péndulo de Foucault justo en uno de los polos?*

Si colocásemos un péndulo justo en el polo norte, un observador situado en reposo cerca del mismo, vería que el plano de oscilación giraría 360 º describiendo una circunferencia, empleando en ello todo el día, en el sentido de E a O.

A continuación se transcribe parte de la explicación que dio el propio Foucault en una conferencia a este respecto:

"Las numerosas e importantes observaciones que se han hecho hasta ahora con el péndulo, tienen como objetivo determinar la duración de sus oscilaciones. Sin embargo, lo que yo me propongo aquí es mostrar que el desplazamiento de su plano de oscilación de E a O, es una prueba palpable de la rotación diaria de la Tierra de O a E. Con este objeto, me permitiré ignorar el movimiento de traslación de la Tierra (que no ejerce ninguna influencia en el fenómeno analizado) y supondré que el observador es trasladado al Polo en donde hemos colocado un péndulo simple suspendido de un único punto absolutamente fijo a la Tierra y de modo que el hilo en la posición de reposo coincida con el propio eje de rotación terrestre.

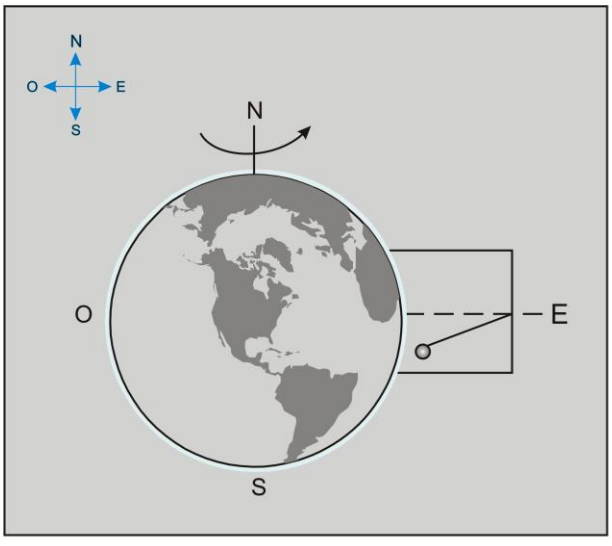


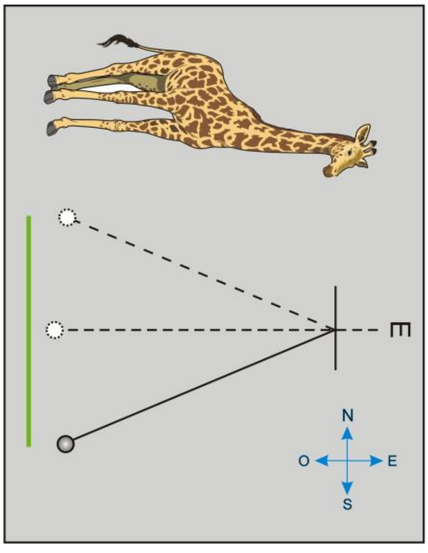


Si en estas condiciones hacemos oscilar la bola, el péndulo describirá un arco de círculo situado en un plano nítidamente determinado el cual, en virtud de la inercia de la materia, al estar el hilo suspendido por un punto dado y ser la bola atraída constantemente hacia el mismo centro de la Tierra, tendrá asegurada una posición invariable en el espacio. En consecuencia, si las oscilaciones se prolongan durante un tiempo, el movimiento del globo terrestre que no deja ni por un instante de girar de O a E, se hará patente por contraste, con el plano de oscilación, de manera que en caso de que fuese posible mantener las oscilaciones durante 24 horas y con la misma amplitud, la proyección de la bola del péndulo sobre el suelo del Polo, habría formado un círculo perfecto en torno al eje de rotación terrestre. "

A.3. *¿Qué ocurriría si dispusiéramos un péndulo de Foucault justo en el ecuador?*

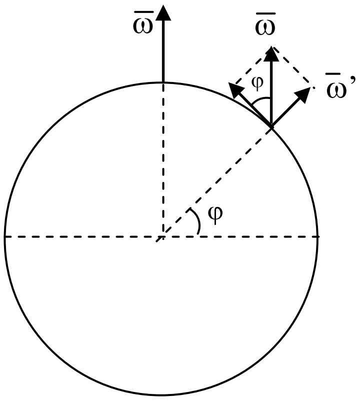
En el caso de situarnos en el ecuador, hay que tener en cuenta que el marco del que pende el péndulo se mueve solidariamente con el ecuador terrestre alrededor del eje N-S, y por tanto, un observador allí situado no vería cambiar el plano de oscilación del péndulo. La proyección de la bola sobre el suelo formaría una línea recta.





A.4. *¿Qué pasa en un punto que se encuentre entre el polo y el ecuador?*

Se trata de una situación intermedia a las descritas anteriormente. En este caso, se puede comprobar que el plano de oscilación del péndulo gira en el sentido previsto, pero emplea más de 24 horas en dar la vuelta.



$$\boxed{\omega' = \omega \cdot sen\,\varphi}$$

Como ω = 2π/T siendo T el periodo de rotación de la Tierra en torno a su eje. El péndulo, describirá un giro completo en 24 horas para un observador situado en el polo (donde φ = 90º y ω'= ω) e irá aumentando la duración del giro conforme nos vayamos acercando al ecuador (φ disminuyendo desde 90º hasta 0º). En el ecuador es evidente que φ = 0º y que ω'= 0 .