

¿CÓMO ES EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO QUE SE LANZA EN UNA DIRECCIÓN NO VERTICAL?

Manuel Alonso Sánchez. manuelalonso@inicia.es

Jaime Carrascosa Alís. jaime.carrascosa@uv.es

Salvador Martínez Sala. salvmart50@gmail.com

Juan José Ruíz Ruíz. juanjorui124@gmail.com

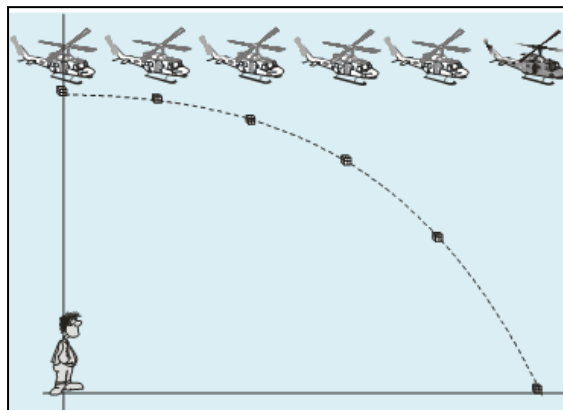
El tiro horizontal y el tiro oblicuo se estudian en el primer curso de Bachillerato (en España), en un momento avanzado del tema de Cinemática. Previamente, los alumnos se han familiarizado con las magnitudes necesarias para describir cualquier movimiento (posición, cambio de posición, velocidad, aceleración, etc.) y conocen las ecuaciones de algunos tipos de movimiento (como mínimo, uniforme y uniformemente acelerado). Además, han debido realizar un estudio teórico y experimental del movimiento de caída (vertical) de graves. Se trata aquí, de ampliar este estudio, considerando otros movimientos reales cuya trayectoria es a-priori desconocida, como son el tiro horizontal y el tiro oblicuo.

1. Consideración del posible interés del tiro horizontal

Una de las nuevas investigaciones sugeridas al terminar el trabajo práctico sobre la caída de graves fue el estudio de otros movimientos más complejos, como, en concreto, el de los proyectiles. Galileo en el siglo XVII se planteó el estudio de este tipo de movimientos, llegando a obtener algunos resultados de carácter general. El tema presentaba un indudable interés práctico debido fundamentalmente a la importancia creciente de la artillería en aquella época. Nos plantearemos, en primer lugar, qué interés puede tener estudiar estos movimientos en la actualidad.

A.1. Considerad el posible interés del estudio de movimientos de objetos lanzados en dirección horizontal u oblicua.

Los conocimientos sobre este tipo de movimiento se siguen utilizando en el lanzamiento de proyectiles, también en el lanzamiento de objetos desde vehículos en movimiento (como, por ejemplo, el suministro de víveres desde aviones) y en muchos deportes: algunos con balón, como fútbol o baloncesto; otros en los que se lanzan diversos objetos, como peso o jabalina; otros en los que el tiro horizontal u oblicuo lo protagonizan los propios deportistas, como salto de longitud, salto de altura, etc.



Por otra parte, hay que resaltar el papel que jugó el tiro horizontal en la formulación de la síntesis newtoniana, ya que el propio Newton lo utilizó para esgrimir argumentos destinados a superar la separación, admitida desde la antigüedad, entre los mundos terrestre y ce-

leste, los cuales se concebían como dos lugares de muy distinta naturaleza y cada uno con sus propias leyes. Una separación radical, que afectaba también al movimiento de todo tipo de objetos (desde una piedra hasta los propios astros) que ocurrían en el ámbito de cada uno de dichos mundos y que eran vistos como tipos de movimientos completamente diferentes. Aunque esto no se tratará con detalle hasta el desarrollo del tema de Dinámica, interesa ahora mencionar, entre los ejemplos de lanzamiento oblicuo, alguno que conecte “ambos tipos de movimiento”, como, por ejemplo, los involucrados en el proceso de puesta en órbita de satélites artificiales. Dicho proceso comienza con el lanzamiento oblicuo de un cohete, que transporta varios satélites. Cuando el cohete supera la atmósfera, normalmente incrementa su velocidad, tras emitir gases o partes de él mismo en sentido opuesto a su movimiento. Así consigue situarse en una órbita “baja” y, una vez ahí, desde el cohete se van lanzando los satélites mediante otros tiros oblicuos, cuya velocidad inicial y ángulo son los precisos para que tales satélites terminen recorriendo por encima del cohete la órbita deseada.

2. Precisión del problema

A.2. Con objeto de hacer el problema más fácilmente abordable, considerad cómo se puede acotar y qué simplificaciones convendrá hacer.

Para mayor sencillez, comenzaremos estudiando el “tiro horizontal” (ángulo inicial de lanzamiento igual a cero), para continuar después, en el anexo 1, con el estudio, más general, de tiros oblicuos.

Además de hacer esta acotación se han de añadir otras condiciones simplificadoras. Los alumnos han visto en trabajos prácticos anteriores (por ejemplo, al estudiar la caída de graves) que el rozamiento con el aire puede producir una enorme complejidad en los movimientos y, por tanto, plantean la conveniencia de elegir un objeto (una bola metálica, una pelota,..) y de suponer unas condiciones ambientales (ausencia de viento,..), tales que pueda considerarse despreciable dicho rozamiento.

Otra cuestión importante, que no ha de pasar desapercibida, es el hecho de que en un lanzamiento de muy largo alcance podría ser relevante la curvatura de la Tierra y la aceleración de la gravedad dejaría de poder ser considerada constante. Por tanto, hay que precisar que limitaremos el estudio a lanzamientos cuyo alcance máximo y cuya altura sean lo suficientemente pequeños como para poder despreciar la curvatura de la superficie terrestre y para poder considerar a la aceleración de la gravedad como un vector constante (módulo, dirección y sentido), durante todo el trayecto.

Tras realizar estas acotaciones, interesa elegir un caso concreto de tiro horizontal, que sea adecuado para su estudio experimental.

A.3. Proponed ejemplos de movimientos que puedan considerarse un "tiro horizontal" y a continuación, escoged uno adecuado para su estudio en el laboratorio.

Existen numerosos ejemplos de tiro horizontal en la vida diaria, como el de un chorro de agua que sale horizontalmente por una manguera o por la boca del grifo de una fuente, la caída de una bola que rodaba encima de una mesa, un disparo de cañón horizontal realizado desde lo alto de una colina, el movimiento de un objeto que se deja caer desde un avión en pleno vuelo (el cual es visto como un tiro horizontal por las personas situadas en tierra), etc.



Fuente de los 7 caños (Siete Aguas, Valencia)

Entre todos los movimientos citados, elegiremos para la investigación la caída de una bola que rodaba encima de una mesa, porque es un movimiento que cumple las condiciones, se puede producir muy fácilmente en cualquier laboratorio escolar y permite un control relativamente sencillo de las variables que intervienen.

3. Planteamiento de hipótesis

A.4. *Haced rodar una bola o una pelotita encima de una mesa y observad su movimiento, desde que se considera un tiro horizontal. ¿Qué tipo de movimiento puede ser? Tratad de dibujar su trayectoria.*

Esta es la primera ocasión en la que los estudiantes se enfrentan al estudio de un movimiento con una trayectoria no rectilínea. A algunos les cuesta bastante dibujar una trayectoria aceptable (la hacen, por ejemplo, inicialmente horizontal, aún después de que la pelotita deja de apoyarse en la mesa, y luego curva) y, más aún, justificarla. Otros sí se dan cuenta de que en cuanto la pelota deja de estar apoyada encima de la mesa, empieza a descender e, incluso, algunos afirman que esa trayectoria es una parábola, pero esto no significa que puedan justificar adecuadamente dicha trayectoria.

Por tanto, aunque se llegue a consensuar que la trayectoria puede ser una curva parabólica, es preciso preguntar a los estudiantes cómo se podría obrar para dibujarla de una forma precisa y, también, para señalar sobre esa trayectoria posiciones sucesivas ocupadas por la pelotita a intervalos iguales de tiempo. Se trata de un reto difícil para los alumnos y, para ayudarles a superarlo, podemos empezar planteando la siguiente actividad:

A.5. *Realizad observaciones cualitativas de varios lanzamientos horizontales y tratad de avanzar alguna hipótesis sobre este movimiento que nos pueda ayudar a estudiarlo. Más concretamente: que nos pueda ayudar a prever la trayectoria descrita por el móvil desde su lanzamiento hasta su llegada al suelo.*

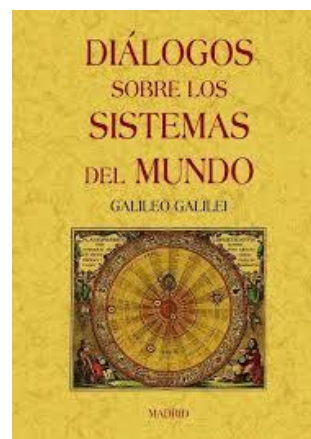
El hecho de que al realizar diferentes lanzamientos con distintas velocidades horizontales iniciales se obtengan alcances diferentes, ayuda a que se asimile la idea de que a lo largo de todo el movimiento el objeto lanzado avanza horizontalmente, y permite suponer que si no hubiera gravedad (ni rozamiento alguno) se movería indefinidamente en línea recta según la horizontal y con la misma velocidad inicial con que se lanzó. Una vez se entiende

esto, hace falta dar un pequeño paso adicional para que se comprenda también que, puesto que el objeto mientras avanza también cae, puede ser razonable considerar dicha caída de forma independiente (a la vez que simultánea) del avance horizontal.

Así, este conjunto de razonamientos conduce a intuir la **hipótesis de Galileo**, según la cual **el tiro horizontal se podría obtener (en ausencia de rozamiento) componiendo dos movimientos teóricos independientes entre sí: uno horizontal uniforme (a la velocidad con que se lanza) y otro vertical, idéntico a su caída libre desde el mismo punto de lanzamiento (sin velocidad inicial)**. Con la formulación de esta brillante hipótesis, Galileo consiguió analizar este problema complejo e hizo posible, por primera vez, un estudio riguroso del mismo.

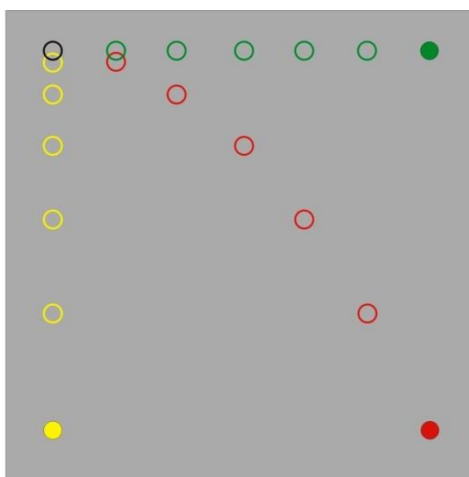
Los alumnos pueden ahora leer el siguiente texto de la obra de Galileo "Diálogos sobre los dos grandes sistemas del mundo, ptolemaico y copernicano" (1632), en el que Galileo expresa su hipótesis:

"Sabemos que el movimiento que tendrá lugar sobre un plano será uniforme y perpetuo, en el supuesto de que el plano se prolongue hasta el infinito. Si por el contrario, el plano es limitado, el móvil que suponemos dotado de gravedad, una vez llegue el extremo del plano y continúe su marcha, añadirá al movimiento precedente, uniforme e inagotable, esta tendencia hacia abajo, debida a la gravedad. Nace así un movimiento descendente naturalmente acelerado. Pues bien, a este tipo de movimiento yo le llamo proyección y hemos de demostrar alguna de sus propiedades, la primera de las cuales es la siguiente proposición: Un proyectil que se desplaza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente naturalmente acelerado, describe, en este movimiento, una línea semi-parabólica".



A.6. Usad la hipótesis de Galileo para encontrar sucesivas posiciones del objeto a intervalos iguales de tiempo y finalmente dibujad la trayectoria seguida trazando una línea curva que una dichas posiciones.

Esta actividad es fundamental para que los alumnos se apropien de la hipótesis. Conviene que la resuelvan en primer lugar como un ejercicio de lápiz y papel, y, después de ello, puede ser muy útil también que usen un programa informático adecuado, como puede ser *Modellus*, para simularla. En la imagen siguiente se ha reproducido la secuencia final de esta simulación.



Para crearla, los alumnos empiezan escribiendo la ecuación de la posición de un movimiento uniforme y colocan una pelotita (verde) que lo realiza en la dirección horizontal, x , y va dejando una huella estroboscópica en la pantalla. A continuación, escriben la ecuación de la posición de un movimiento de caída libre y colocan una segunda pelotita (amarilla) que lo realiza en la dirección vertical, y . Finalmente, colocan la tercera pelotita (roja), y le exigen que, ateniéndose a la hipótesis de Galileo, realice el movimiento que se obtiene componiendo ambos, por tanto, con coordenadas (x, y) . Al correr la animación, se obtiene un resultado similar al que se espera en la actividad de lápiz y papel, pero con la ventaja de ser una imagen dinámica, que va mostrando cómo las tres pelotitas ocupan paulatinamente en la pantalla sus sucesivas posiciones.

4. Operativización de la hipótesis y elaboración de diseños experimentales

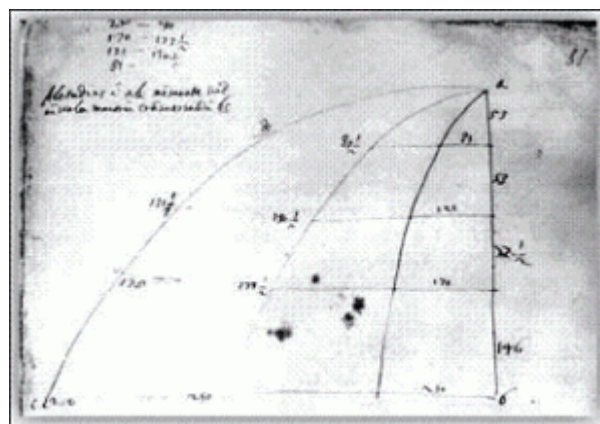
Hemos visto que la hipótesis de Galileo exige un comportamiento físico-matemático al movimiento horizontal (teórico), otro al movimiento vertical (teórico) y, finalmente, que el movimiento real se obtenga componiendo ambos. Partiendo de estos requerimientos interesa deducir posibles consecuencias, susceptibles de ser contrastadas experimentalmente.

A.7. Aceptando la hipótesis de Galileo ¿qué pasaría con el tiempo empleado por una pequeña pelota en llegar al suelo cuando se lanza horizontalmente y cuando, en lugar de ello, se deja caer verticalmente desde el mismo punto?, ¿serían distintos o serían iguales?

Si efectivamente el tiro horizontal se pudiera considerar como la superposición de dos movimientos simples (rectilíneo y uniforme de avance según la horizontal el uno y rectilíneo uniformemente acelerado de caída en vertical el otro) sin que interfieran entre sí, dichos tiempos tendrían que coincidir, independientemente de la velocidad con que se haya lanzado horizontalmente el objeto. Galileo expresó así esta notable consecuencia de su hipótesis:

“... Si desde lo alto de una torre disparásemos con un cañón horizontalmente contra un blanco, según fuera la carga de pólvora, el proyectil caería a tierra unas veces a mil yardas, otras a cuatro mil, otras a diez mil, etc., pero siempre invertiría el mismo tiempo en llegar al suelo, que coincidiría con el que tardaría en caer la bala desde la boca de la pieza hasta el suelo si, falta de impulso, lo hiciese según la vertical. Parece, pues, cosa admirable que en el mismo intervalo de tiempo invertido en la caída perpendicular a tierra desde una altura, digamos, de 100 yardas, balas iguales disparadas violentamente serían capaces de recorrer cuatrocientas, mil y aun diez mil yardas”

Galileo ilustró esta derivación de su hipótesis con el dibujo adjunto, en el que (a pesar de su mal estado de conservación), aún se puede apreciar cómo él mismo trazó varias de estas trayectorias y las atravesó horizontalmente a distintas alturas. A cada una de tales alturas le corresponde un determinado instante de tiempo el cual es el mismo para todos los proyectiles, (incluido el que se deja caer verticalmente).



A.8. *Proponed algún experimento fácil de realizar con el que se pueda comprobar la igualdad de tiempos deducida en la actividad anterior.*

En principio cabe pensar en efectuar un tiro horizontal con una pelotita que rueda por la superficie de una mesa hasta sobrepasar el borde de la misma. Se puede impulsar con diferentes velocidades, y también se puede dejar caer verticalmente la misma pelotita u otra idéntica desde una altura igual a la de la mesa. A continuación habría que comparar los tiempos de caída obtenidos en todos los casos, para comprobar si son iguales.

Sin embargo, para poder llevar adelante el experimento en estos términos se precisa disponer de un material sofisticado, capaz de medir con suficiente precisión los tiempos de caída. Después de haber realizado el trabajo práctico sobre la caída de graves, los alumnos saben que estos tiempos son brevísimos y que, por ejemplo, no servirá un cronómetro ordinario, dada la notable imprecisión que se produce al activarlo y desactivarlo manualmente. Conviene entonces buscar un diseño experimental, inspirado en esta idea, que pueda sortear estas dificultades.

A.9. *¿Cómo se podría concretar el diseño experimental, de modo que se evite una medida directa de los tiempos de caída de la pelota (vertical y tiro horizontal) y, sin embargo, se pueda comprobar de algún modo que ambos tiempos son iguales?*

Para superar esta dificultad podemos orientar el experimento hacia una comparación directa entre los dos movimientos (vertical o con velocidad inicial nula y tiro horizontal), procurando que sean simultáneos. Para ello se requiere usar dos pelotas idénticas e idear un método de lanzamiento que asegure en lo posible que ambas empiezan sus respectivos movimientos en el mismo instante. Como ambos movimientos son muy rápidos y breves, no bastará con una simple observación visual de los mismos para contrastar la hipótesis, sino que interesa filmarlos con objeto de poder analizar a cámara lenta dicha filmación.

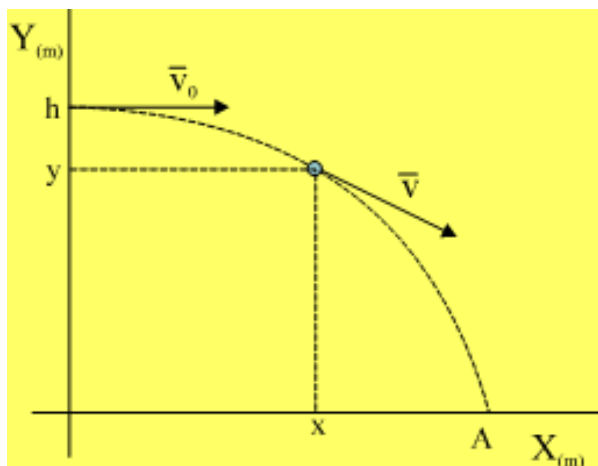
Así pues, podemos plantear el siguiente diseño experimental:

Elaborar un montaje adecuado para hacer que dos pelotas idénticas realicen respectivamente un tiro horizontal y un movimiento de caída vertical, que comiencen en el mismo instante y a la misma altura. Filmar dichos movimientos y analizar el video obtenido para comprobar si los tiempos de caída son iguales para intervalos iguales de tiempo (**diseño experimental 1**).

Si los alumnos han utilizado previamente un programa de simulación para comparar movimientos reales (filmados) con simulaciones que se atengan a las leyes de la Física, ellos mismos pueden plantear que el análisis de la filmación, se realice usando este recurso. Como hemos mostrado en trabajos prácticos anteriores (véase, por ejemplo, los trabajos prácticos sobre la caída de graves, con y sin rozamiento) este tipo de análisis se puede realizar con el programa *Modellus* (versiones 2.5 y/o 3) y con el programa *Tracker*.

Otra enseñanza del trabajo práctico sobre la caída de graves fue ver que en movimientos muy rápidos, resulta mucho más sencillo determinar con precisión algunas posiciones concretas en vez de tiempos. Por este motivo interesa buscar posibles consecuencias de las hipótesis, cuya contrastación requiera que se determinen valores de determinadas posiciones. Siguiendo esta estrategia en el problema que nos ocupa, veremos ahora que es posible prever una relación entre la altura (posición vertical inicial) y el alcance (posición horizontal final), susceptible de ser contrastada experimentalmente.

A.10. Intentad hacer operativa la hipótesis de Galileo, escribiendo $x=x(t)$ e $y=y(t)$ para los movimientos en que podemos considerar descompuesto un tiro horizontal y, a continuación, eliminad el tiempo entre ambas, para obtener la ecuación de la trayectoria en explícitas $y=y(x)$. Finalmente, buscad alguna relación que debería cumplirse entre puntos especiales de dicha trayectoria.



El movimiento teórico del avance horizontal se supone uniforme. Por tanto, si v_0 es la velocidad inicial del lanzamiento, su ecuación es:

$$x = v_0 \cdot t \quad (\text{ecuación 1})$$

Por su parte, el movimiento teórico de caída vertical se supone uniformemente acelerado, igual que una caída libre con aceleración g . Si el lanzamiento ocurre desde una altura “ h ”, su ecuación es:

$$y = h - \left(\frac{1}{2}\right) g \cdot t^2 \quad (\text{ecuación 2})$$

Despejando el tiempo “ t ” en la ecuación (1) y sustituyendo en la (2) obtenemos la **ecuación de la trayectoria**:

$$y = -\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2} + h$$

Esta última expresión es la ecuación de la trayectoria en explícitas, ya que relaciona directamente las dos coordenadas de posición (x , y) sin intervención del tiempo. Como la altura h , la gravedad g y la velocidad horizontal v_0 , son parámetros constantes, se trata de la ecuación de una parábola de ramas hacia abajo en el plano XY, tal como habíamos supuesto y tal como prevé la proposición de Galileo.

En el instante en que el proyectil choque contra el suelo, su posición será: $y = 0$ y $x = A$ (alcance), y, por tanto, sustituyendo estos valores en la ecuación de la trayectoria, obtenemos la expresión que relaciona (para una v_0 determinada), las alturas de lanzamiento con los alcances:

$$h = \left(\frac{g}{2 \cdot v_0^2} \right) \cdot A^2$$

La ecuación anterior también puede expresarse como: $h = k \cdot A^2$

siendo k una constante cuyo valor viene dado por $k = \frac{g}{2 \cdot v_0^2}$

Esta relación entre la altura y el alcance de un tiro horizontal, es una clara consecuencia contrastable de la hipótesis de Galileo, por lo que su confirmación experimental, equivale a confirmar dicha hipótesis.

A.11. *Proponed algún diseño experimental mediante el que se pueda contrastar si la relación entre la altura h a la que se realiza un tiro horizontal y el alcance A obtenido, se ajusta o no a la ecuación: $h = k \cdot A^2$.*

Podemos pensar en el siguiente diseño:

Realizar diferentes lanzamientos horizontales desde varias alturas (todos con la misma velocidad inicial) y, después de medir los correspondientes alcances (por ejemplo, con una cinta métrica), comprobar si el cociente entre h y A^2 es o no constante (**diseño experimental 2**).

Se puede planificar, por ejemplo, la realización de 5 lanzamientos desde 5 alturas distintas y tomar los datos necesarios para construir una tabla como la adjunta. Una vez que dispongamos de ellos, de ser cierta la hipótesis, la representación gráfica de los valores de la altura h frente a los del alcance A debería ajustarse a una parábola de ramas hacia arriba y la de la altura h frente a A^2 debería ajustarse a una línea recta.

h (m)	A (m)	A^2 (m ²)
h_1	A_1	A_1^2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
h_5	A_5	A_5^2

Los diseños experimentales 1 y 2, que acabamos de plantear, se basan en medir algunos valores particulares de las magnitudes que describen el tiro horizontal (el tiempo total para diferentes lanzamientos, la posición inicial vertical o altura, la posición horizontal final o alcance). También es posible, usando un programa que permita combinar la filmación del movimiento real con una simulación del mismo, plantear un tercer diseño experimental que analice el tiro horizontal en su globalidad.

A.12. *Proponed un diseño experimental para comprobar globalmente la hipótesis de Galileo usando un programa que permita simular el movimiento.*

Igual que ocurre con el diseño experimental 1, si los alumnos ya hayan realizado otros trabajos prácticos usando simulaciones y su comparación con la filmación de movimientos, plantean, sin mayores dificultades, el traslado de esta técnica aquí. Esto conduce a expresar el siguiente diseño experimental:

Utilizar un programa que combine videos con la simulación de movimientos, para comparar en la pantalla del ordenador el movimiento real de un tiro horizontal (filmado) con un movimiento teórico que se atenga a la hipótesis de Galileo (simulado). Dicha comparación permitiría constatar la hipótesis y también si el valor de la aceleración vertical del movimiento es, como debería, igual a “ g ” (**diseño experimental 3**).

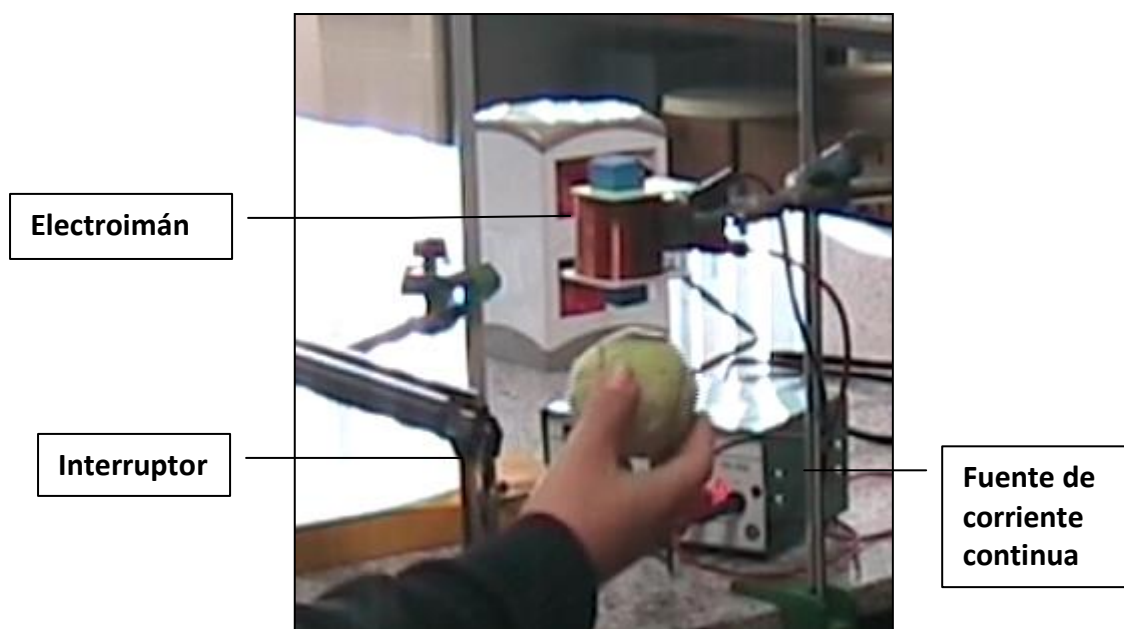
5. Realización y análisis del experimento destinado a contrastar si el tiempo de caída es el mismo para tiros horizontales con diferentes velocidades iniciales (diseño 1)

Recordemos que en este experimento se trata de analizar simultáneamente el lanzamiento horizontal de una pelota con el movimiento de caída vertical de otra idéntica que comience en el mismo instante y a la misma altura. Antes de proceder a realizar el experimento es necesario ver la manera de producir ambos movimientos con un montaje adecuado.

A.13. *Proponed formas de resolver el siguiente problema técnico ¿Cómo conseguir que las dos pelotas comiencen su movimiento en el mismo instante y desde la misma altura?*

Para resolver este problema un grupo de alumnos de 1º Bachillerato del IES Cid Campeador de Valencia durante el curso 2008-09, elaboraron el siguiente montaje:

Pegaron a una pelota de tenis una arandela metálica y construyeron un electroimán con una fuente de corriente continua, una bobina y un núcleo de hierro. El circuito del electroimán culminaba en un final de carrera mecánico (interruptor), situado al final de un carril horizontal. Colgaron la pelota con el tope de acero en el extremo del imán, comprobando que al tocar el interruptor situado encima del extremo del carril horizontal, la pelota se “despegaba” y caía.

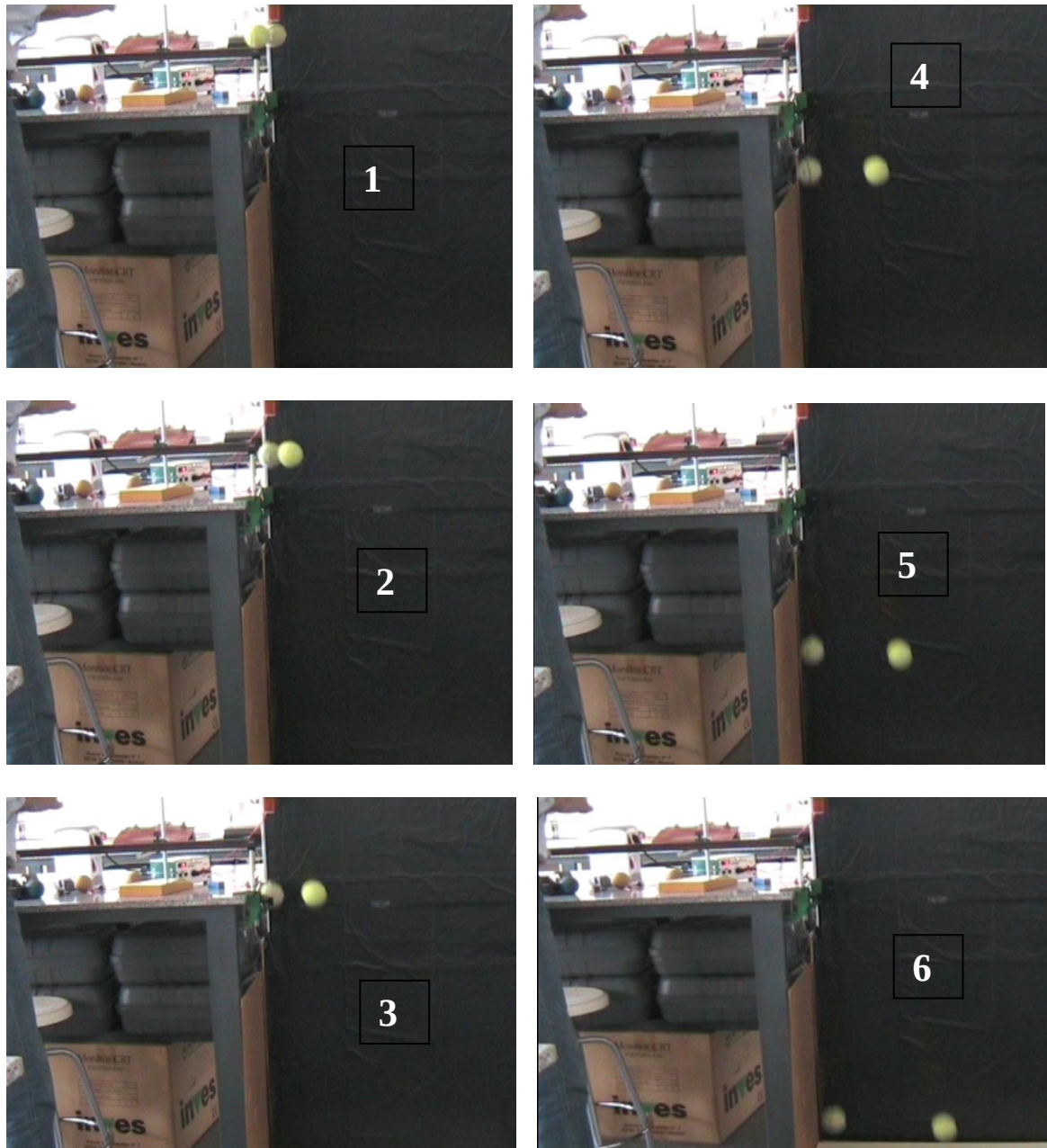


Este final de carrera lo situaron justo en el extremo de un carril horizontal por donde lanzaron la otra pelota de tenis. Así, cuando esta segunda pelota superaba el borde del carril, la primera dejaba de estar atraída por el imán y, desde ese instante ambas pelotas caían con dos trayectorias diferentes iniciadas prácticamente en el mismo instante y a la misma altura.

Realizado el montaje, y antes de proceder a la realización del experimento, se pueden hacer varias pruebas lanzando la pelota por el carril horizontal con diferentes velocidades, con objeto de ver qué impulso inicial hay que darle para conseguir que tras accionar el final de carrera ambas pelotas describan una trayectoria adecuada para ser comparadas.

A.14. *Proceded a realizar el experimento y analizad el resultado del mismo.*

Mostramos seguidamente una secuencia de imágenes consecutivas, entre las que se obtuvieron en el experimento, registradas a intervalos iguales de tiempo:



Como puede verse, estas imágenes muestran que las dos pelotas tienen alturas iguales en los mismos instantes de tiempo de sus respectivas caídas (vertical y parabólica), confirmando muy claramente esta derivación de la hipótesis. Por otra parte, a partir del video obtenido de los movimientos de las dos pelotas, se pueden realizar también otros análisis experimentales en los que se comparen dichos movimientos (filmados) con los de una simulación de los mismos. Mostraremos más adelante estos análisis como parte de los resultados referidos al diseño experimental 3.

6. Realización y análisis del experimento destinado a contrastar la relación entre la altura y el alcance (diseño experimental 2)

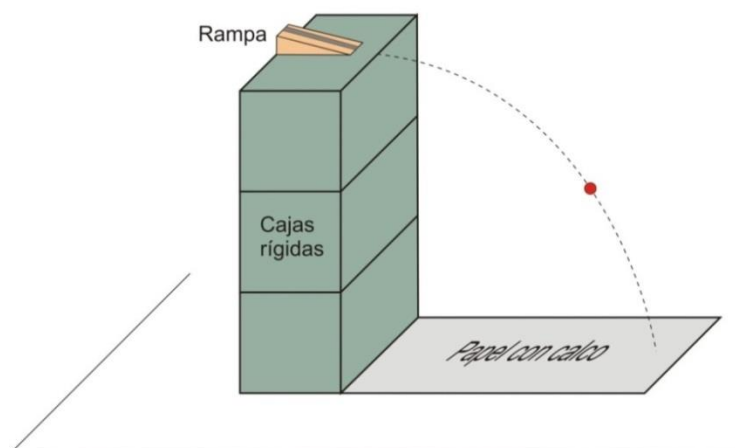
Recordemos que en este experimento se realizan varios lanzamientos horizontales para diferentes alturas y se ha de analizar la relación que debería existir entre la altura, h , y el alcance, A , de cada lanzamiento. Para llevarlo adelante, antes hay que resolver algunos problemas “técnicos”.

A.15. *Proponed formas de resolver los problemas técnicos que se enumeran a continuación: a) ¿Cómo conseguir una determinada velocidad inicial (siempre la misma) de los lanzamientos? b) ¿Cómo conseguir alturas variables? c) ¿Cómo medir el alcance correspondiente a cada altura?*

Una forma sencilla de hacer que la velocidad con la que se lanza una bolita sea siempre la misma consiste en utilizar un pequeño plano inclinado o rampa desde la que soltaremos la bolita colocándola de inicio siempre en la misma posición. Dicha rampa hay que fijarla sobre una plataforma horizontal (la de lanzamiento) siempre en el mismo lugar. Por otra parte, si en el laboratorio se dispone de puertas lógicas, se pueden usar para cuantificar también la velocidad inicial de los lanzamientos. En este caso, se puede conectar un carril horizontal que finalice en el borde de la mesa a continuación de otro inclinado sobre el que se deja la bolita. En el carril horizontal se colocarían dos puertas lógicas conectadas a un cronómetro que mida el tiempo que tarda en pasar la bolita entre ellas. La velocidad inicial del tiro horizontal coincidirá con la de la bolita en el carril horizontal y se calculará simplemente mediante la expresión: $v_0 = \Delta e / \Delta t$, donde Δe es la separación entre las puertas.

En cuanto a cómo conseguir una altura variable, se puede hacer desplazando la plataforma en la que colocamos la rampa mediante un soporte vertical de los que existen en los laboratorios escolares. Otra alternativa es utilizar varios objetos como, por ejemplo, cajas rígidas del mismo tamaño que se van apilando unas sobre otras. También puede pensarse en mantener fija la altura de la plataforma de lanzamiento e ir cambiando la altura de otra plataforma preparada para recibir el impacto de la bolita.

Finalmente, para medir los alcances, se puede utilizar un papel de calco sobre un papel blanco o milimetrado que se encuentra en una posición fija respecto al punto de lanzamiento. También se puede usar una bandeja sobre la que se eche la cantidad de arena necesaria para crear una fina película, con el fin que la bola deje, al impactar sobre la arena, una marca nítida. Una tercera opción es pintar la pequeña bola con tiza para que cuando choque contra el suelo deje una marca.



A.16. *Proceded a la realización del experimento y analizad los resultados que se obtengan*

Conviene realizar cada lanzamiento (desde una determinada altura) varias veces y, en el caso de que las señales de impacto de la bolita se encuentren en puntos distintos, tomaremos como valor más representativo del alcance el valor medio. Si se cuidan los detalles, se suelen obtener resultados bastante buenos.

A modo de ejemplo, mostramos resultados que obtuvieron en el IES Cid Campeador de Valencia alumnos de 1º de Bachillerato en el curso 2008-2009. En la fotografía siguiente se observan los detalles principales de su experimento. Los estudiantes colocaron dos puertas lógicas en el carril horizontal (en la fotografía adjunta puede verse la segunda de ellas al final del carril) y usaron un papel blanco y otro de calco para determinar el punto de impacto. Para conseguir diversas alturas del tiro horizontal, modificaron la correspondiente a la superficie donde se producía el impacto, utilizando cajas y los taburetes de laboratorio.



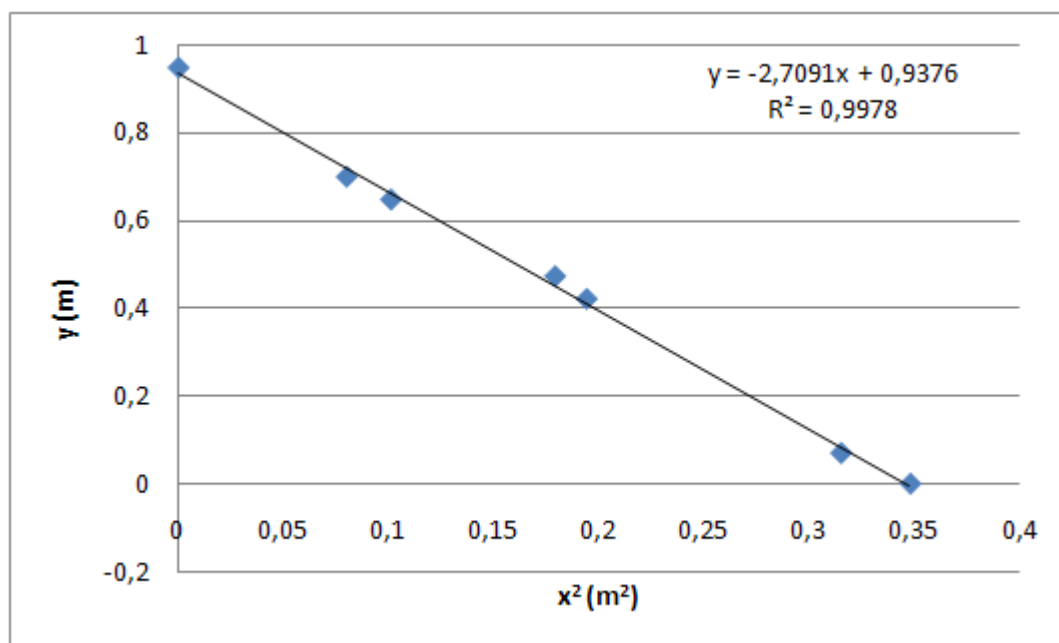
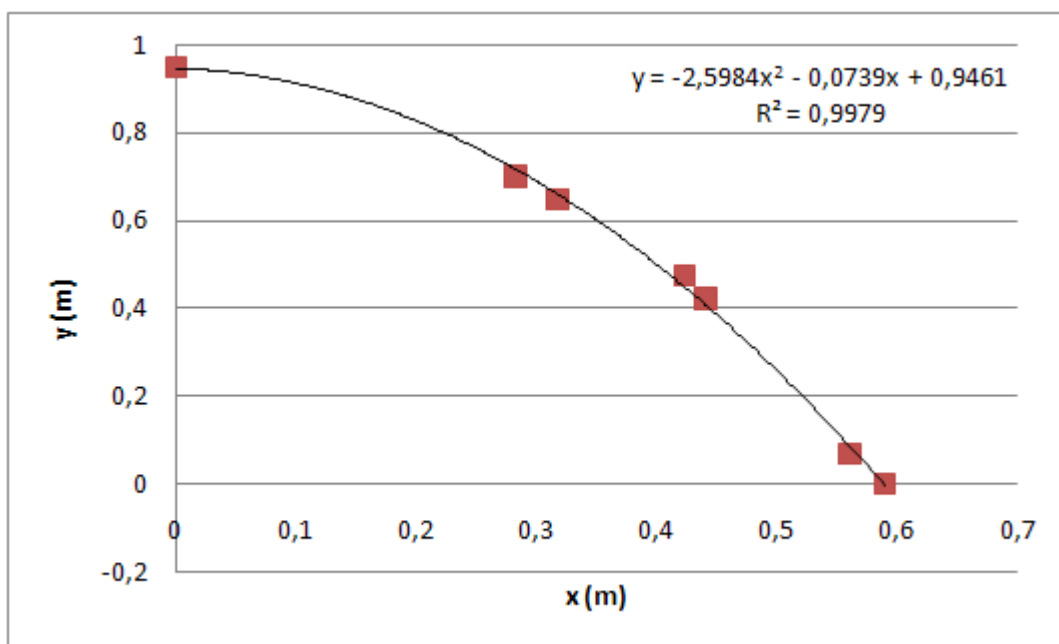
Con los valores obtenidos confeccionaron la siguiente tabla de datos sobre las alturas, y , los correspondientes alcances, x , y los cuadrados de ellos, x^2 .

$y \text{ (m)}$	$x \text{ (m)}$	$x^2 \text{ (m}^2\text{)}$
0,950	0,000	0,000
0,701	0,283	0,080
0,649	0,318	0,101
0,474	0,423	0,179
0,422	0,441	0,194
0,070	0,561	0,315
0,000	0,590	0,348

Hemos visto que para que se cumpla la hipótesis de Galileo, la ecuación de la trayectoria del tiro oblicuo ha de ser:

$$y = h - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2}$$

Y que, por tanto, la representación de $y = f(x)$ ha de producir una parábola invertida, mientras que la de $y = f(x^2)$ ha de producir una recta descendente. Los estudiantes construyeron ambas gráficas usando una hoja de cálculo. Como se observa, ambas cumplieron sobradamente estas expectativas.



Teniendo en cuenta, por otra parte, que la pendiente de esta recta ha de ser:

$$m = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2}$$

Se usó su valor para calcular la velocidad inicial, v_0 , del lanzamiento que se deduciría en el experimento si se acepta que g sea igual a $9,8 \text{ m/s}^2$.

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2 \cdot m}} = \sqrt{\frac{9,8}{2 \cdot 2,7091}} = 1,345 \text{ m/s}$$

Al comparar este valor con el obtenido en el mismo experimento en el plano horizontal (usando las puertas lógicas):

$$v_0 = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{0,60}{0,433} = 1,386 \text{ m/s}$$

Se constata que ambos resultan muy próximos, ya que la desviación entre ellos es del orden del 3%.

7. Realización y análisis de los experimentos destinados a contrastar la relación entre la altura y el alcance, usando un programa de simulación (diseño experimental 3)

En la actividad A.6, se ha creado una animación *Modellus* que, aplicando la hipótesis de Galileo, simula un movimiento horizontal uniforme, un movimiento vertical de caída libre y el tiro horizontal obtenido componiendo ambos. Si se quiere seguir usando el mismo programa, ahora habrá que completar dicha animación para realizar el experimento que ha de mostrar bajo qué condiciones el movimiento real de la pelotita concuerda con ese tiro horizontal simulado.

A.17. *Tomando como punto de partida la animación creada en la A.6 proceded a realizar el experimento para contrastar la hipótesis de Galileo. Filma el video del movimiento, insertadlo en la animación, y preparadla para el análisis experimental.*

Si los alumnos han utilizado este recurso en trabajos prácticos anteriores (como la caída de graves), están familiarizados con este tipo de diseño experimental y, tras el montaje correspondiente, proceden a realizar las siguientes actividades:

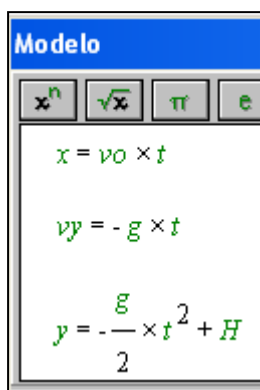
- ✓ Un alumno lanza la pelota encima de una mesa del aula y otros filman su movimiento con una cámara sencilla (sirve la cámara de cualquier teléfono móvil). Como van a comparar en la pantalla el movimiento real filmado, con la animación del mismo, el diseño experimental incluye la señalización de una longitud de referencia visible a la cámara. En este caso no es necesario señalarla explícitamente, puesto que sirve la propia altura de la mesa, que es la altura inicial del tiro horizontal.



- ✓ Seguidamente los equipos recortan el video para dejar un clip que corresponda con la mayor exactitud posible al tiro horizontal, es decir, que se inicie cuando la pelota deja de apoyarse en la mesa y termine en el instante en el que impacta contra el suelo. Insertan dicho clip en la animación, obtienen en la pantalla la equivalencia entre *píxeles* y *metros* y, usando esta conversión, también obtienen los parámetros del mismo: altura inicial, alcance y velocidad horizontal. Vemos en la imagen que en este caso, 1 m (altura de la mesa) equivalió a 110 píxeles , con lo que el alcance fue de 1.23 m (135 píxeles) y la velocidad horizontal (obtenida dividiendo el alcance entre el tiempo total que dura en la propia animación el tiro horizontal, 0.5 s) resultó $v_0 = 1.23/0.5 = 2.46\text{ m/s}$.



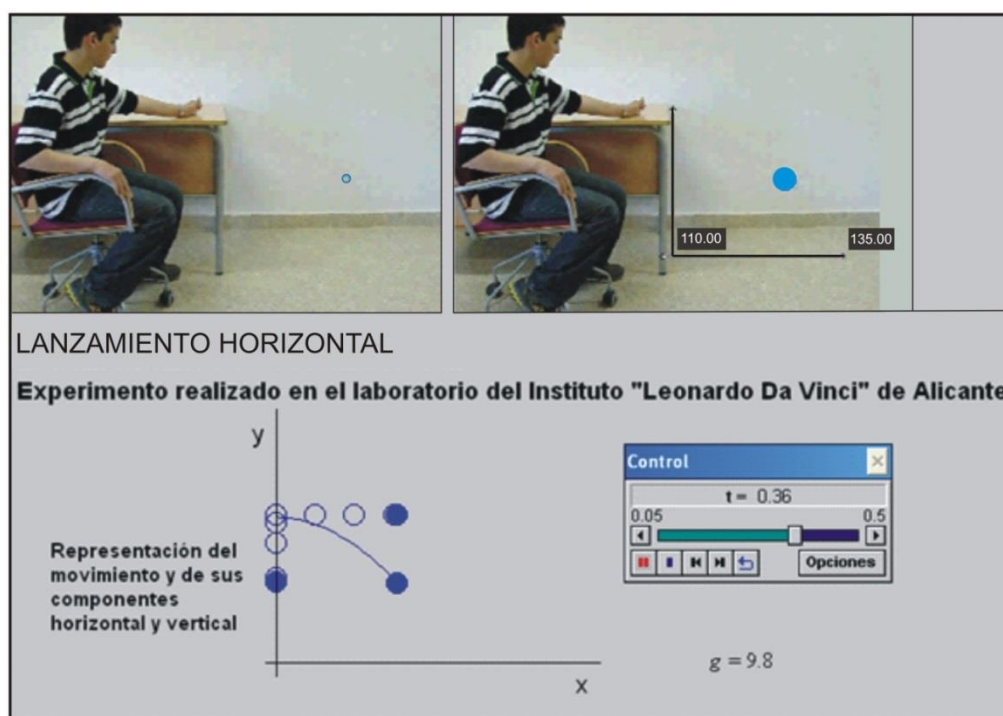
- ✓ A continuación, introducen estos parámetros en la ventana del programa correspondiente, para particularizar el modelo físico matemático a este caso concreto. Si quieren aprovechar también el experimento para estimar el valor de g (en lugar de dar por conocido su valor), dejan en las ecuaciones g como variable y, aunque le den un valor inicial en la ventana de los parámetros, introducen en la pantalla un cursor o un indicador manual que permita al usuario modificar dicho valor. De este modo el análisis, además de servir para contrastar la hipótesis de Galileo, podrá mostrar para qué valor de g se produce la mejor concordancia entre el movimiento real y el simulado.



Parámetros	
	caso 1
v_0	2.46
g	9.83
H	1

Tras haber realizado todas estas operaciones, sólo falta hacer un clic para que corra la animación, y contrastar si se cumple la esperada concordancia entre el movimiento real (filmado) y el movimiento teórico (obteniendo el valor g para el que mejor se produce esta concordancia). La siguiente imagen muestra una secuencia intermedia (correspondiente al

instante $t = 0.36$ s contado desde que comienza el lanzamiento horizontal, es decir, desde que la pelotita deja de apoyarse encima de la mesa) del resultado que obtuvo un grupo de alumnos de 1º Bachillerato en el IES “Leonardo da Vinci” de Alicante.



En la imagen izquierda del clip de video se observa a la pelotita real (azul) en ese instante, mientras que en la imagen derecha, esa pelotita real está tapada por la pelotita virtual (también azul, pero de mayor diámetro). El hecho de que así sea a lo largo de todo el movimiento, evidencia que la pelotita virtual acompaña a lo largo de todo el movimiento a la pelotita real y, por tanto, constata que se está verificando la hipótesis de Galileo, ya que, como se muestra en la misma animación (debajo a la izquierda), el movimiento de esa pelota virtual se obtuvo componiendo los movimientos teóricos horizontal uniforme y vertical de caída libre. En la pantalla también vemos el indicador manual de g , que muestra que esta buena concordancia entre el movimiento simulado y el real se produjo para un valor de la gravedad de 9.8 m/s^2 . Conviene advertir, no obstante, que este resultado cuantitativo tiene una imprecisión de entre un 5 % y un 10%. Entre los factores que producen dicha imprecisión hay que considerar el ajuste realizado al establecer la equivalencia entre m y píxel , la indeterminación al comparar la ubicación de la pelotita virtual con la real, etc.)

A partir de la filmación del experimento en el que se contrastó la primera derivación de la hipótesis (Actividades A.13 y A.14), se puede realizar un análisis similar al recién mostrado. En efecto, recordemos que en dicho experimento se filmaron dos movimientos simultáneos de una pelota de tenis: uno de trayectoria vertical y el otro de trayectoria parabólica. Por tanto, se puede usar el programa de simulación para agregar algunos análisis cuantitativos sobre la evolución de las magnitudes en cada uno de dichos movimientos.

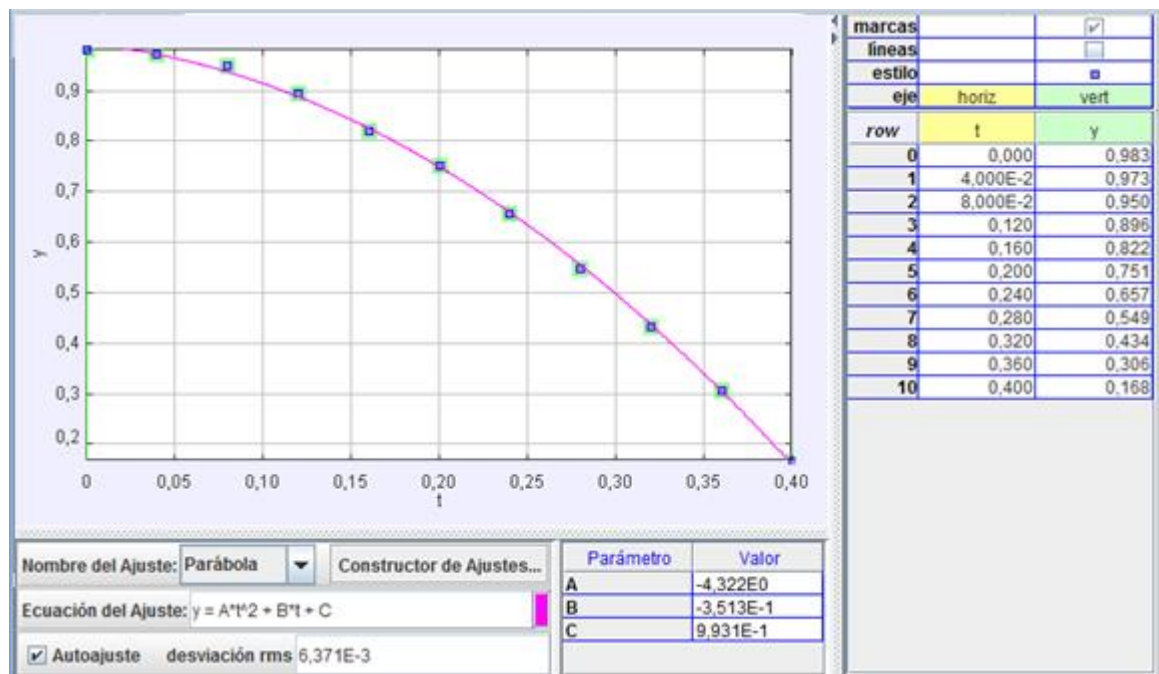
A.18. Utilizad el programa Tracker para realizar análisis cuantitativos sobre los movimientos de dos pelotas lanzadas desde la misma altura, que siguen respectivamente una trayectoria vertical y parabólica (filmados en la A.14).

Recordemos las imágenes inicial y final de la filmación de los movimientos de caída de ambas pelotas, que se realizó en el IES “Cid Campeador” de Valencia.

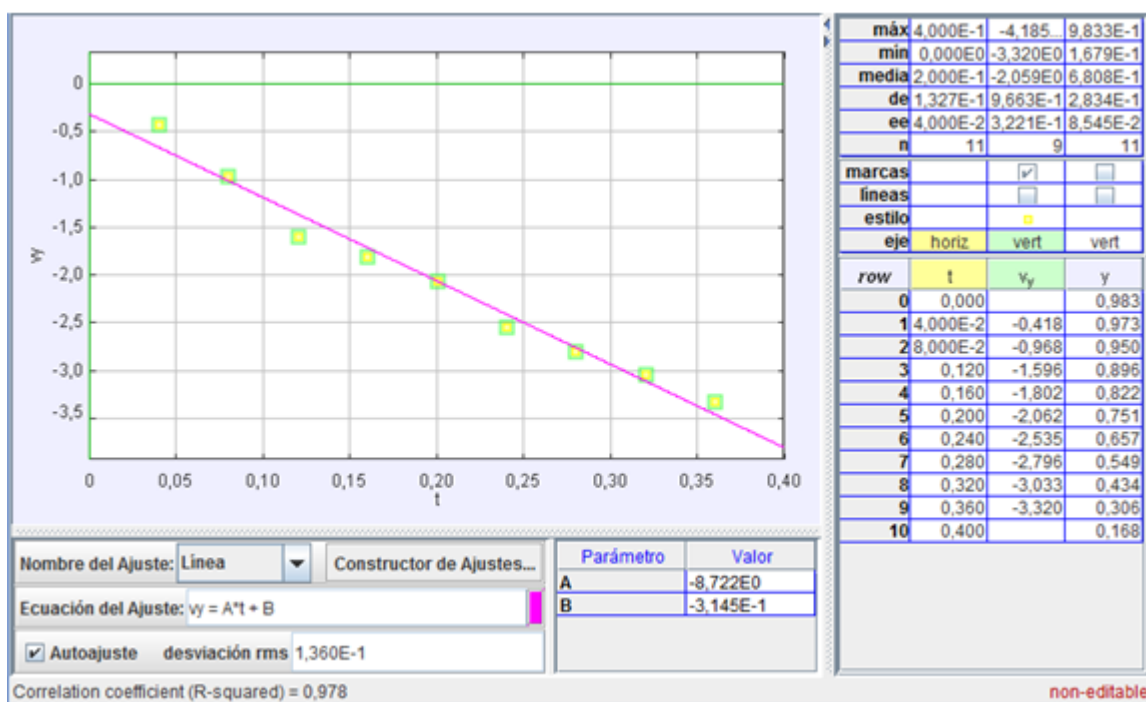


Se trata ahora de contrastar si el movimiento de ambas pelotas se ajusta, como debería, a un mismo modelo físico-matemático, obtenido aplicando la hipótesis de Galileo, y que, por tanto, se diferencie únicamente en que la velocidad inicial (horizontal) de una es nula y la de la otra no lo es. A modo de ejemplo de ello, mostramos las siguientes gráficas y ajustes realizados con el programa Tracker a partir del análisis de las posiciones determinadas en la imagen del video (partiendo de los datos experimentales dicho análisis obtiene la función matemática que mejor describe el movimiento de cada una de las dos pelotas por ajuste de mínimos cuadrados).

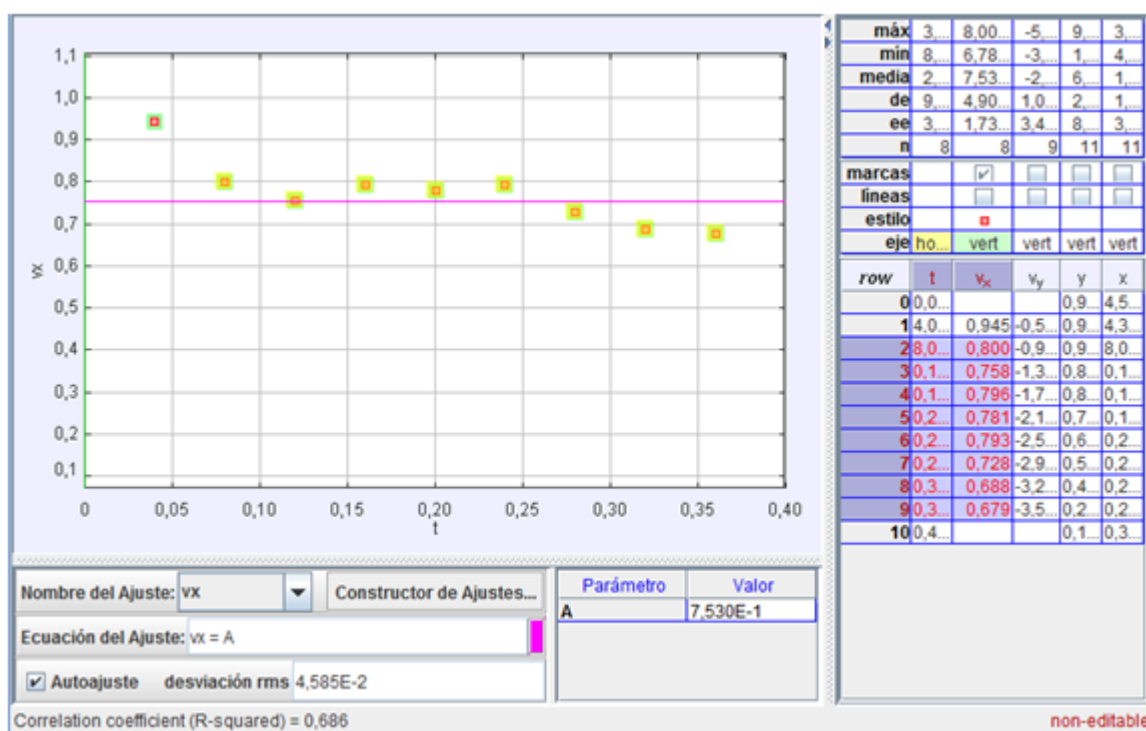
Gráfica de la posición de la pelota en caída libre



Gráfica de la componente vertical de la velocidad de la pelota en caída libre



Gráfica de la componente horizontal de la velocidad que describe el tiro horizontal



8. Perspectivas abiertas. Nuevos problemas

A.19. Enumerad algunas perspectivas abiertas a lo largo de esta investigación, susceptibles de originar nuevos estudios

Algunas de las perspectivas se han sugerido ya durante el trabajo, sobre todo, en la parte inicial del mismo, cuando se acotó el problema y se adoptaron condiciones simplificadoras, para facilitar su estudio. Podemos referirnos, entre otras, a los siguientes problemas que podrían ser investigados:

- ✓ Inicialmente se acotó el estudio al tiro horizontal, pero siendo conscientes de que la mayoría de movimientos parabólicos comienzan con una velocidad oblicua, no horizontal y que, en general, el objeto tiene una parte de movimiento ascendente y otra parte descendente. Nos podemos plantear ahora si la hipótesis de Galileo se podría extender al estudio del tiro oblicuo y, en su caso, realizar un estudio teórico sobre el movimiento similar al realizado para el tiro horizontal (obteniendo su posible trayectoria, ecuaciones, etc.)
- ✓ Apoyados en este estudio teórico del tiro oblicuo, cabe plantear un posible trabajo práctico sobre él, semejante al realizado sobre el tiro horizontal y que se podría quizá aplicar a algunos ejemplos de movimientos cotidianos de interés ya mencionados al comienzo (lanzamiento de objetos en deportes, lanzamiento oblicuo de proyectiles, etc.).
- ✓ Otra condición simplificadora que se introdujo fue limitar el estudio a lanzamientos de corto alcance, para poder despreciar la curvatura de la Tierra. Podemos también plantear cómo podría ser el movimiento de un objeto lanzado horizontal u oblicuamente si la velocidad de lanzamiento fuera suficientemente grande para desbordar esta situación simplificada. Como hemos comentado en la parte inicial de este trabajo práctico, este estudio puede ser muy instructivo, porque puede conectar con movimientos “objetos celestes”, como, por ejemplo, el de un satélite que se lance hacia la órbita que ha de describir, precisamente mediante un tiro oblicuo.
- ✓ El procedimiento consistente en descomponer un movimiento complejo en otros más simples, y la posibilidad inversa de obtener un movimiento complicado mediante la composición de otros más sencillos, lo propuso Galileo para estudiar los movimientos de proyectiles. Cabe suponer que esta estrategia también será útil en otras situaciones, que involucren a otros tipos de movimientos. Por ejemplo, ¿qué tipo de movimiento se obtendría componiendo un movimiento rectilíneo uniforme con otro armónico simple perpendicular a al primero? ¿qué resultado dará la composición de dos movimientos armónicos simples perpendiculares?, etc.

Dedicamos seguidamente varios anexos a tratar detalles sobre algunas de estas cuestiones, cuya relevancia permite destacar el valor de esta investigación.

9. Memoria del trabajo

Para terminar, planteamos que los estudiantes recojan el trabajo realizado en una memoria de la investigación.

A.20. Elaborad una memoria del trabajo práctico realizado en la que se detalle qué problema nos hemos planteado, cuáles han sido las hipótesis y sus consecuencias directamente contrastables, el diseño experimental elaborado y escogido, los resultados obtenidos y el análisis de los mismos.

Insistimos, una vez más, en que interesa dar a esta actividad el sentido de la auténtica comunicación científica, superando su connotación habitual de simple ejercicio escolar, destinado a ser calificado por el profesor. La publicación de unas *actas* del trabajo realizado y la organi-

zación de sesiones de *comunicación* oral (con ayuda de proyecciones, vídeos, simulaciones, etc.) y de sesiones *póster* abiertas a otros alumnos, contribuye a dar interés a este esfuerzo de comunicación, además de proporcionar una visión más correcta del trabajo científico, buena parte del cual está centrado en dicha comunicación.

También se puede realizar en clase un esquema de la investigación (por ejemplo, a modo de un mapa conceptual) y, si se desea, se puede usar en la puesta en común una animación interactiva sobre la hipótesis de Galileo, similar a las que hemos visto durante el trabajo práctico. La imagen siguiente muestra una secuencia de una animación *Modellus* que hemos elaborado con este fin. Usándola, los alumnos pueden, por ejemplo, prever diferentes situaciones que se tendrían para determinados valores de los parámetros (¿qué pasaría si no hubiera gravedad, si la velocidad inicial fuera nula, si aumenta o disminuye la altura inicial,...?) antes de hacerla correr y ver la solución de dichas posibles situaciones.



RECURSOS TIRO HORIZONTAL Y TIRO OBLICUO

Los experimentos sobre el tiro horizontal realizados con ayuda del programa *Modellus* (incluidas todas las animaciones) y los realizados con la ayuda del programa *Tracker*, se pueden consultar y descargar en la Web de materiales didácticos de la Sección Local de la RSEF: <http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm>.

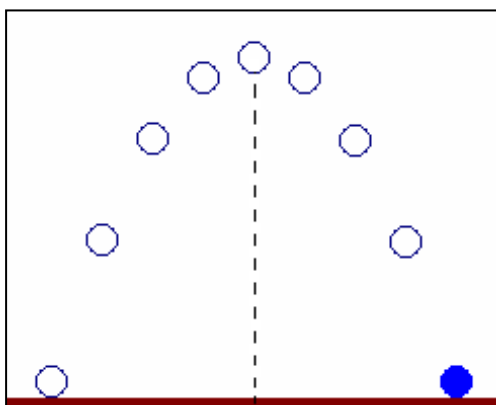
En el anexo 1, se expone un experimento similar al mostrado aquí sobre el tiro horizontal, pero dedicado al tiro oblicuo. La versión original y completa del mismo que sigue el diseño experimental 2 se puede consultar en la página fisquiweb del profesor Luis Ignacio García (<https://fisquiweb.es/Laboratorio/TiroOblicuo/index.htm>), y la que sigue el diseño experimental 3, está en la Web de la S.L. de la RSEF (<http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm>), donde también se pueden descargar diversas animaciones que aplican el estudio a varios ejemplos concretos (rebote oblicuo de una pelota, tiro libre en un partido de baloncesto) .

En esta misma página Web se pueden descargar también las versiones del programa *Modellus* 2.5 (para ordenadores de 32 bits) y *Modellus* 3 (para ordenadores de 64 bits), mientras que, el programa *Tracker* 5.0, se puede descargar, de forma totalmente libre, desde la dirección <https://physlets.org/tracker/> Esta versión está disponible para Windows, Mac OS X, Linux 32-bit i Linux 64-bit.

ANEXO 1

TRABAJO PRÁCTICO SOBRE EL TIRO OBLICUO

Tal como ilustra el dibujo siguiente, todo lanzamiento oblicuo que se inicie en el suelo describe una trayectoria simétrica respecto de un eje vertical.



La segunda mitad de este movimiento se puede considerar como un tiro horizontal, que se iniciaría en la posición de mayor altura del tiro oblicuo. Sabemos que a dicho tiro horizontal le es aplicable la hipótesis de Galileo de descomposición del movimiento y, en consecuencia, es razonable plantear el que dicha hipótesis sea aplicable al movimiento completo, es decir, al tiro oblicuo. (De hecho, Galileo, cuando expresó su hipótesis, se refirió de forma general al lanzamiento de proyectiles, sin limitarla a que dicho lanzamiento fuese necesariamente horizontal).

Por tanto, la trayectoria de un tiro oblicuo se debería poder obtener componiendo las de dos movimientos independientes y perpendiculares entre sí: un movimiento horizontal uniforme y un movimiento vertical uniformemente acelerado, de aceleración g . Partiendo de esta premisa, los alumnos pueden escribir las ecuaciones del movimiento (horizontal y vertical), obtener la ecuación de la trayectoria (constatando que se trata de una parábola), deducir expresiones particulares para obtener magnitudes como el alcance máximo horizontal, la altura máxima del lanzamiento, la duración del tiro o la velocidad del impacto final en el suelo, etc. También pueden deducir otros resultados de interés práctico, como, por ejemplo, el ángulo de lanzamiento que produce el máximo alcance (para una velocidad de lanzamiento dada), el que proporciona la mayor altura máxima, etc. (Todos estos desarrollos se detallan en el anexo 3).

Además de realizar estos desarrollos formales en el aula, también puede ser interesante plantear un trabajo práctico sobre el tiro oblicuo, semejante al que hemos expuesto aquí sobre el tiro horizontal y, que, como aquél, puede conllevar la elaboración de diferentes diseños experimentales, concretamente:

- ✓ Uno en el que se utilicen instrumentos de medida más “tradicionales” para valores concretos de algunas magnitudes, como, por ejemplo, la velocidad inicial, el ángulo, el alcance, etc., con el que se intentarían contrastar posibles relaciones específicas entre ellas (**diseño experimental 1**, similar al diseño 2 del trabajo práctico sobre el tiro horizontal).

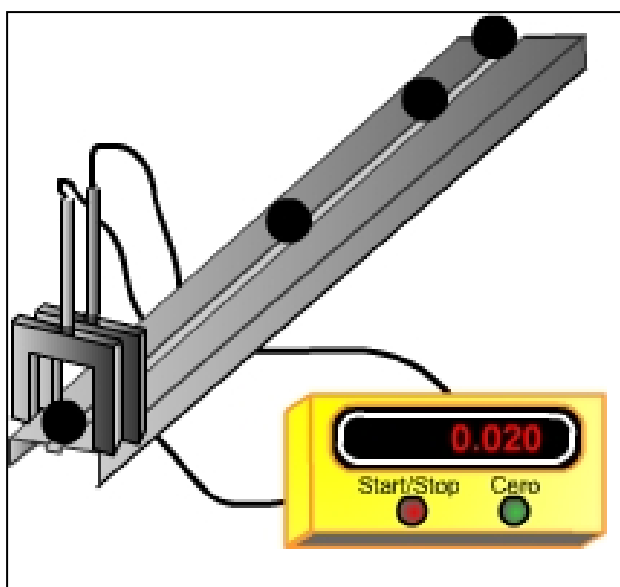
- ✓ Otro en el que se construya una simulación del tiro oblicuo, cuyo modelo físico-matemático conste de las leyes deducidas de la aplicación de la hipótesis de Galileo, que estaría destinado a analizar la posible concordancia entre un tiro oblicuo real (filmado) y el movimiento simulado (**diseño experimental 2**, similar al diseño 3 del trabajo práctico sobre el tiro horizontal).

Mostramos seguidamente algunos detalles y resultados concretos relativos a estos dos tipos de experimento.

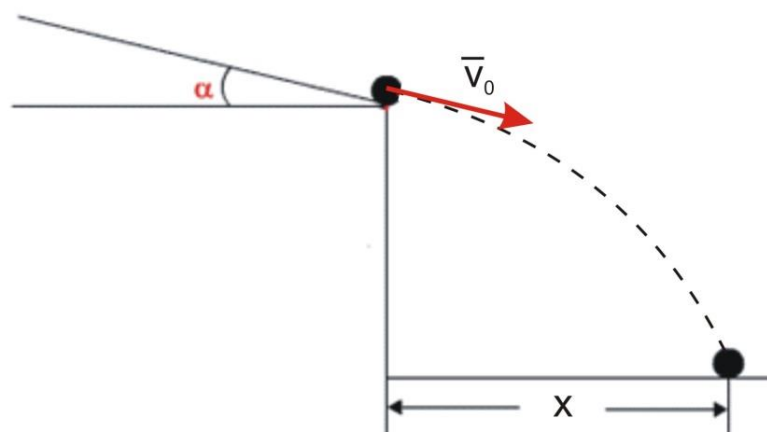
1. Experimento con instrumentos de medida tradicionales (diseño experimental 1)

Comentamos seguidamente algunos aspectos del montaje utilizado en un experimento de este tipo que realizaron alumnos de 1º Bachillerato en el IES “La Magdalena” de Avilés (Asturias) con el profesor Luis Ignacio García.

Igual que hemos hecho en el trabajo práctico sobre el tiro horizontal, en este experimento sobre el tiro oblicuo, se hizo rodar una bola por un plano inclinado y también se colocaron, al final del mismo, dos puertas lógicas conectadas a un cronómetro, cuya misión fue determinar la velocidad inicial de la bola en el lanzamiento oblicuo (para obtenerla, los alumnos regularon la separación entre ambas hasta lograr que cuando la bola pasara por la primera el cronómetro se pusiera en marcha, y que se detuviera al pasar por la segunda).



Sabiendo el valor de la separación existente entre las puertas (en este caso fue de 2,4 cm) y el tiempo que tarda en recorrer esa distancia (0,020 s), pudieron determinar el módulo de la velocidad con la que la bola salía del plano inclinado ($v_0 = 2.4/0.02 = 120 \text{ cm/s} = 1.2 \text{ m/s}$). Los estudiantes también calcularon el ángulo de inclinación del plano, midiendo los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma el plano inclinado (y lo verificaron usando un transportador de ángulos). En este caso, dicho ángulo fue de -15° .



El valor negativo del mismo nos recuerda que en este experimento la velocidad inicial del tiro oblicuo tuvo una inclinación negativa (respecto de la dirección horizontal). Esta situación contrasta con lo que suele ser más habitual en el lanzamiento de proyectiles, pero, en cambio, es similar a otras situaciones cotidianas, como, por ejemplo, la caída de una pelota después de rodar por un tejado.

Finalmente, para determinar experimentalmente el punto de caída, los estudiantes echaron en una bandeja la cantidad de arena necesaria para crear una fina película. Como se observa en la fotografía adjunta, la bola al caer sobre la arena dejaba una marca nítida en el punto de impacto. Por tanto, obtuvieron el alcance del lanzamiento, A , midiendo la distancia desde la vertical del punto de lanzamiento hasta el centro de la marca dejada en la arena.



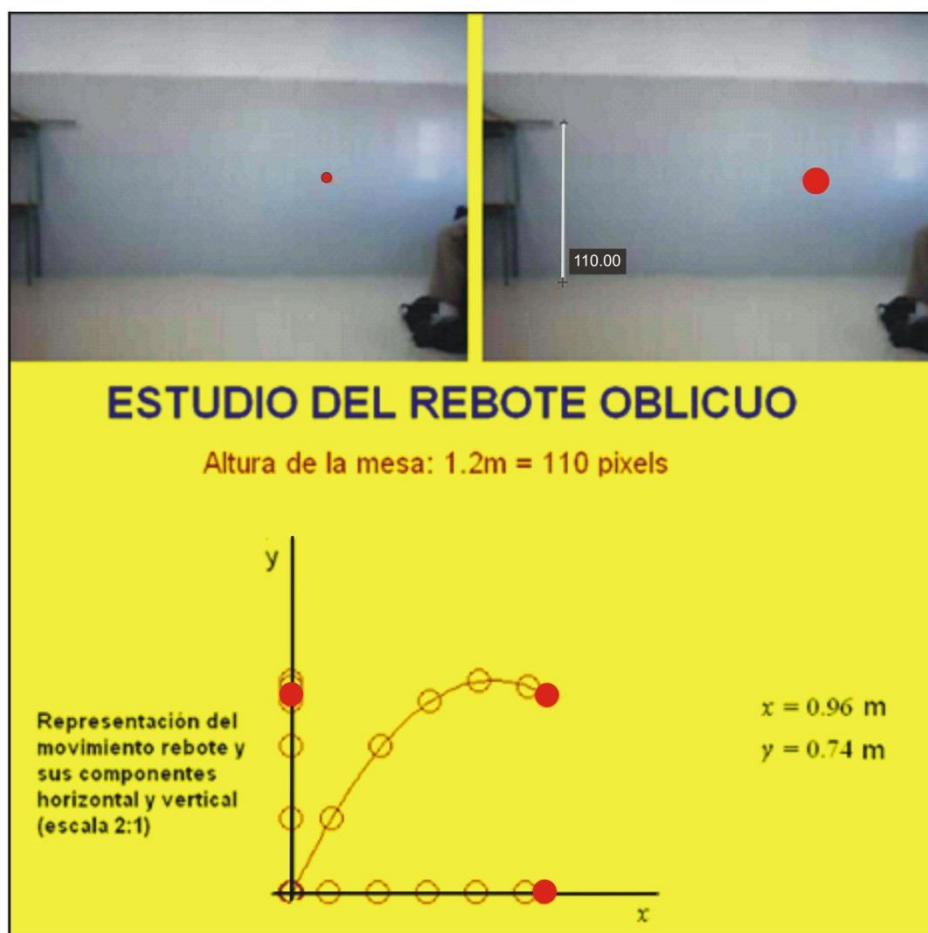
A partir de los datos iniciales del movimiento, la clase obtuvo el valor teórico del alcance y lo compararon con el obtenido en el experimento. El resultado experimental se desvió menos de un 2% con respecto al teórico. El trabajo completo está disponible en la página fisquiweb: <https://fisquiweb.es/>.

2. Experimento realizado con el programa *Modellus* (diseño experimental 2)

En el IES “Leonardo da Vinci” de Alicante, alumnos de 1º de Bachillerato realizaron un estudio experimental del tiro oblicuo acorde con este diseño experimental.

Generaron un tiro horizontal con un montaje similar al mostrado aquí en el trabajo práctico sobre el tiro horizontal (es decir, haciendo rodar una pelotita encima de una mesa), pero, en lugar de realizar el análisis del movimiento de la pelotita desde que deja de estar en contacto con la mesa (tiro horizontal), lo hicieron sobre el movimiento de dicha pelotita desde que rebota por primera vez en el suelo, ya que el movimiento iniciado en el instante de rebotar es equivalente a un tiro oblicuo lanzado desde ese punto del suelo.

La imagen siguiente, muestra una secuencia intermedia de la animación construida para analizar la concordancia entre dicho tiro oblicuo y un movimiento simulado, cuyas ecuaciones se obtuvieron aplicando la hipótesis de Galileo:



Del mismo modo que hemos visto en el trabajo práctico sobre el tiro horizontal, el resultado de este análisis sobre el movimiento tras el rebote de la pelotita, fue comprobar que la pelota virtual acompañaba a la real a lo largo de todo el movimiento, para un valor de la aceleración vertical igual a g .

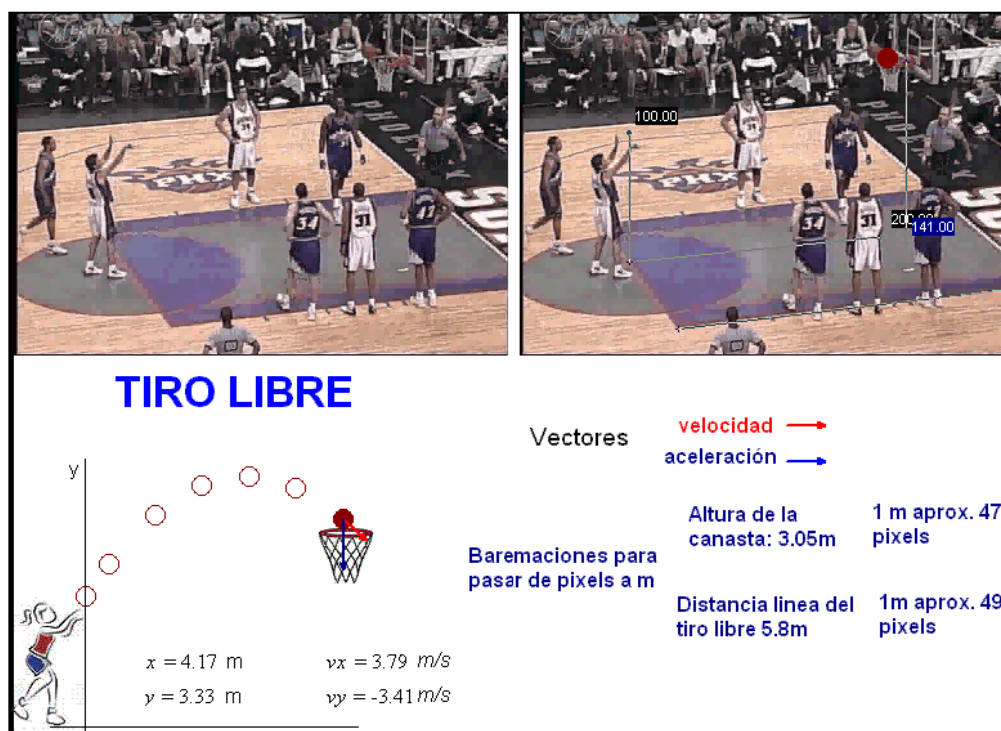
Después de ver este ejemplo, podemos añadir que una ventaja del uso de este recurso es su aplicabilidad a movimientos similares que no necesariamente sean generados o realizados en el laboratorio escolar, ya que será suficiente para poder realizar el análisis, con tener acceso a filmaciones de tales movimientos. Un ejemplo concreto de un tiro oblicuo que puede estudiarse de este modo es el que realiza la pelota en el lanzamiento de un tiro libre en un partido de baloncesto. En el IES “Leonardo da Vinci” de Alicante, los estudiantes de 1º Bachillerato también usaron un clip de video sobre este movimiento para analizar si cumple la hipótesis de Galileo.

Después de volcar dicho clip de video sobre una página *Modellus*, usaron la herramienta de medición de longitudes que proporciona el programa para establecer la equivalencia entre *metro* y *píxeles*, aprovechando dos longitudes que son conocidas: la altura de la canasta y la distancia horizontal entre el lanzador y el borde del campo. Obtuvieron el tiempo que dura el lanzamiento directamente de la filmación, y la altura máxima de la pelota usando la herramienta de medida de longitudes (deteniendo el clip de video-grabación justamente en ese instante).



Con todos estos datos, escribieron el modelo físico-matemático de la simulación, que, de acuerdo con la hipótesis de Galileo, consta de las ecuaciones de dos movimientos teóricos: horizontal uniforme (x) y vertical uniformemente acelerado con aceleración igual a g (y). Finalmente, completaron la animación colocando en la pantalla un balón virtual que debía realizar el movimiento simulado (x, y) y añadieron otros elementos para enriquecerla (entre ellos, sendos vectores representativos de la velocidad y la aceleración de la pelota en cada instante).

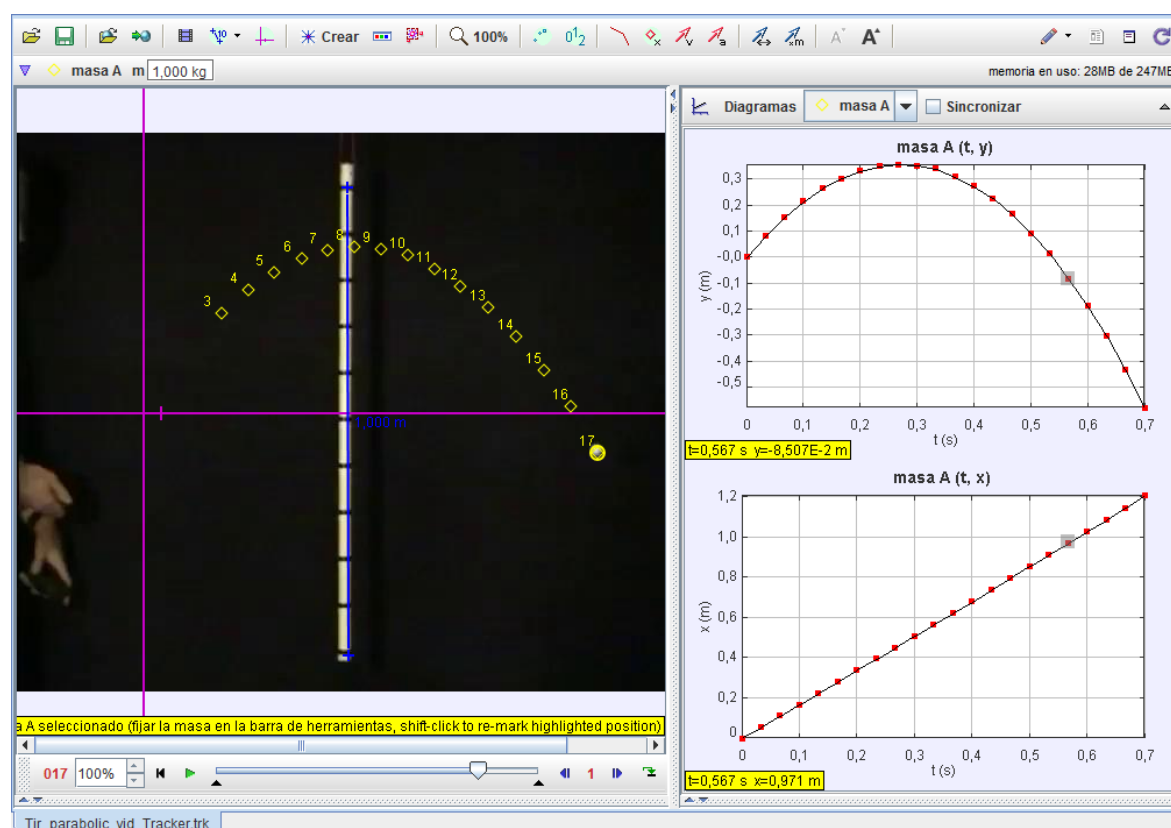
También aquí, al correr la animación elaborada para el estudio de este tiro oblicuo, se obtuvo una excelente concordancia entre el movimiento real del balón (filmado) y el movimiento del balón virtual (simulación). Vemos en la imagen adjunta, que corresponde a una secuencia del movimiento, cómo la pelota virtual tapa a la real en el momento de entrar a canasta (imagen situada a la derecha)



3. Análisis realizados con el programa *Tracker* (diseño experimental 2)

Ya hemos visto en este y en otros trabajos prácticos que la técnica que se ha de usar para realizar análisis experimentales sobre movimientos filmados con el programa *Tracker* es similar a la ya descrita cuando se trabaja con *Modellus*.

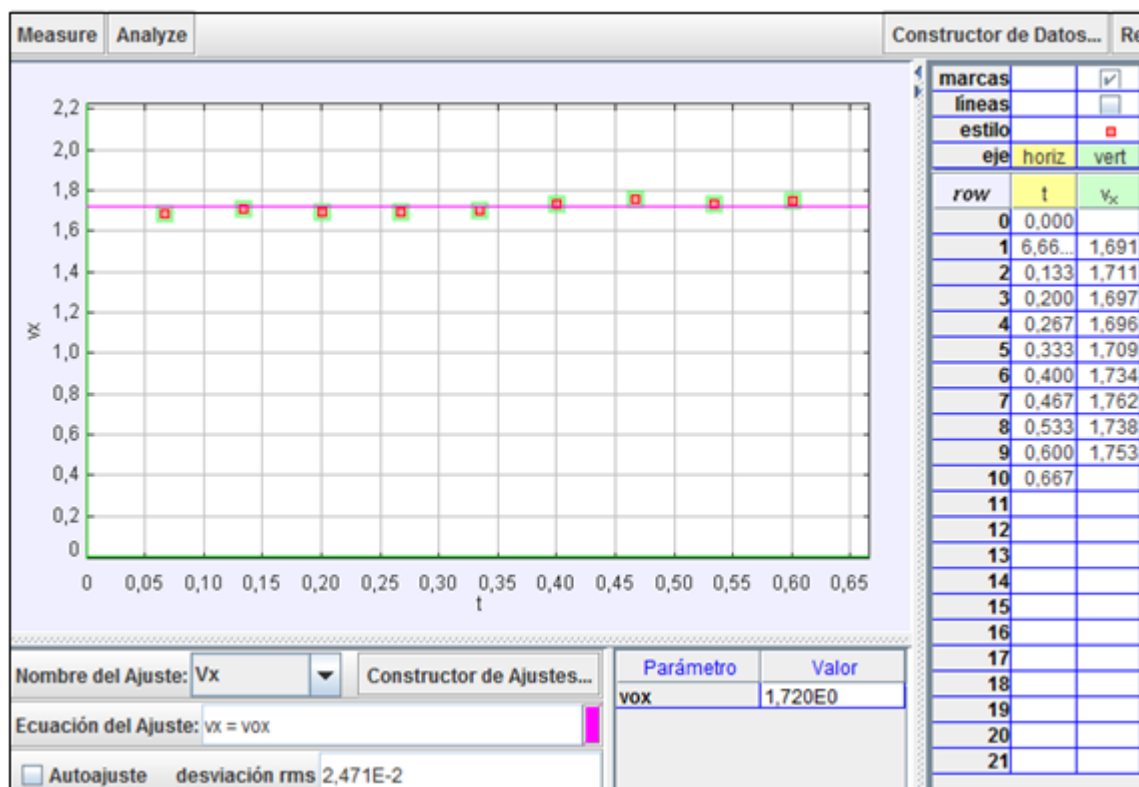
Sabido esto, vamos a mostrar seguidamente la imagen de la última secuencia de un análisis realizado con esta técnica sobre el tiro oblicuo de una pelotita. Dicho análisis se realizó en un curso de formación docente celebrado en 2019 en el Cefire de Ciencias, Tecnología y Matemáticas de Valencia, usando un vídeo disponible en los fondos de la página oficial de *Tracker* (<https://physlets.org/tracker/>).



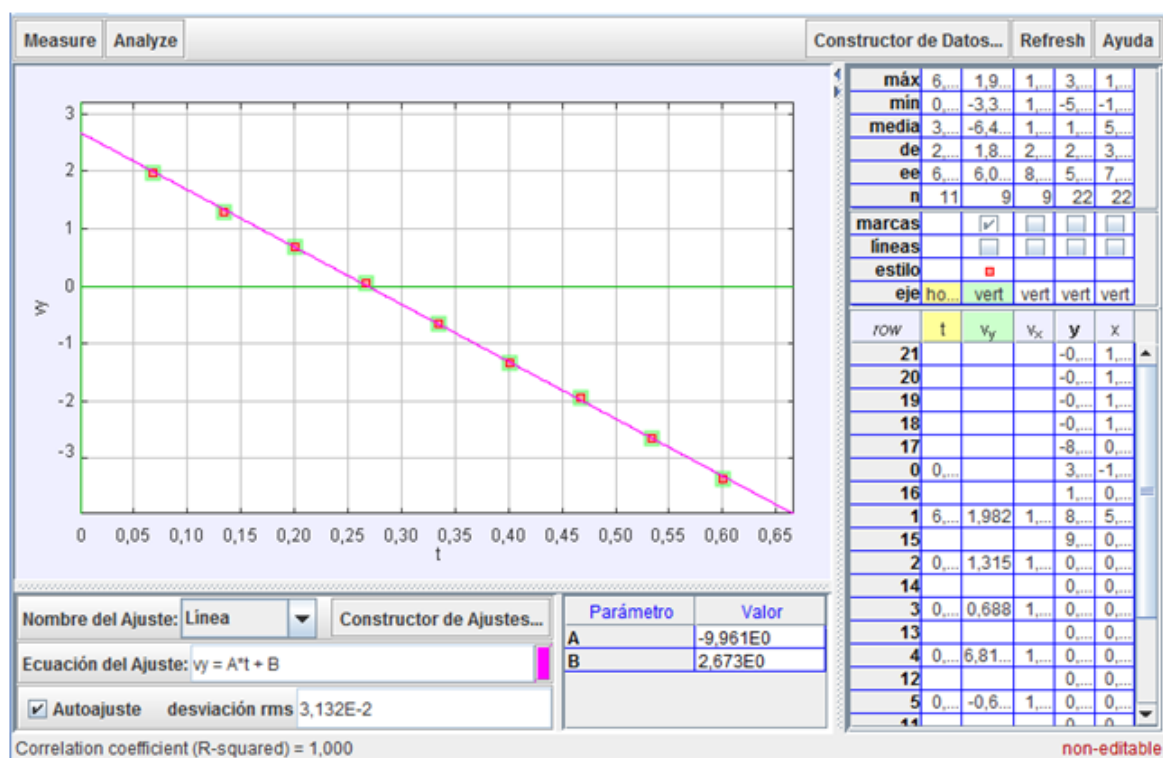
Como vemos, a la izquierda quedan señaladas posiciones sucesivas de la pelota (registradas a intervalos iguales de tiempo), y a la derecha se obtuvieron las gráficas de la evolución de la posición en horizontal “x” y vertical “y” de la pelotita.

En este mismo trabajo, los profesores asistentes también realizaron otro análisis destinado a contrastar si la componente horizontal de la velocidad se mantenía, como así debe ser, constante a lo largo de todo el movimiento. También obtuvieron el valor de la aceleración (vertical) del movimiento (en este caso, resultó $g = -9.96 \text{ m/s}^2$), lo que hicieron calculando con el programa la pendiente de la gráfica de la velocidad. Y, finalmente, representaron en las sucesivas posiciones los vectores que dan en cada instante la velocidad y la aceleración de la pelota.

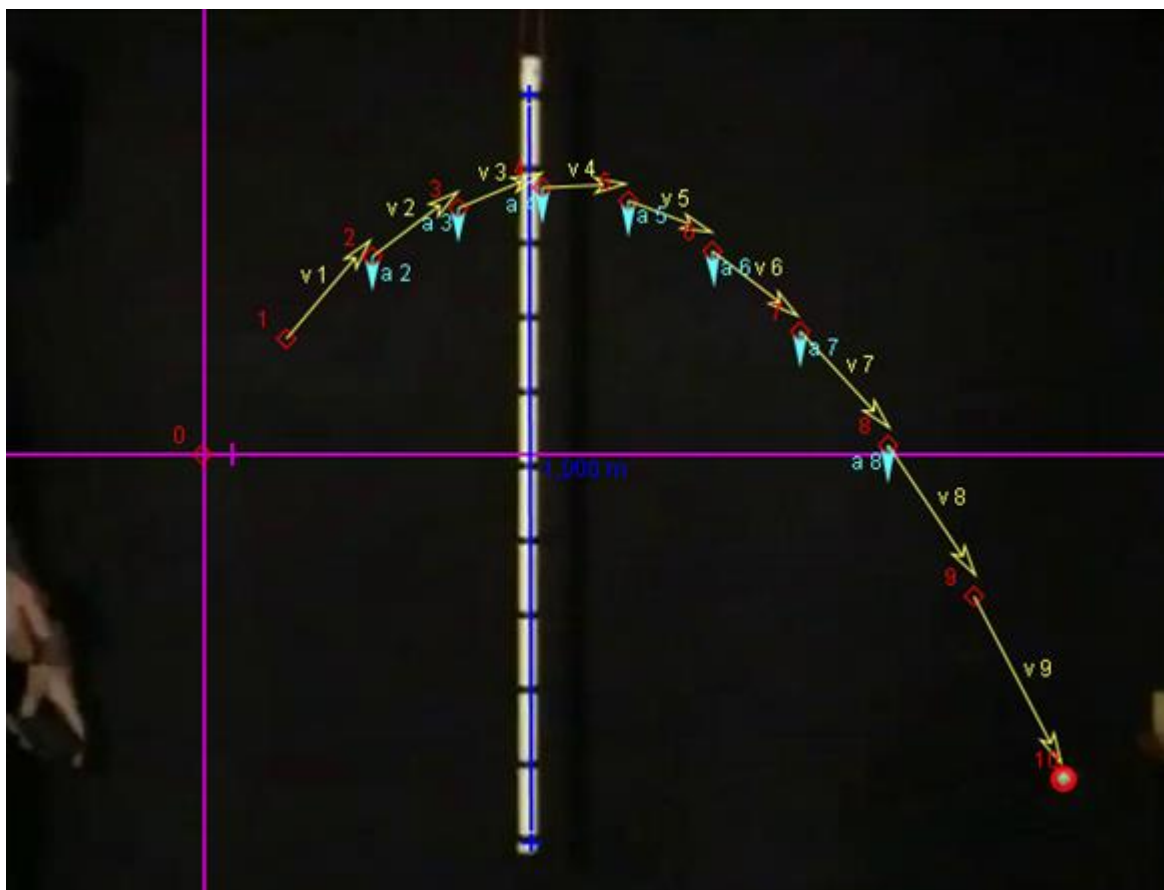
Gráfica de la evolución de la componente horizontal de la velocidad



Gráfica de la evolución de la componente vertical de la velocidad y obtención de g



Vectores velocidad y aceleración en distintos puntos de la trayectoria



(El programa Tracker permite representar los vectores (tanto velocidad como aceleración) para cualquier fotograma del movimiento del objeto).

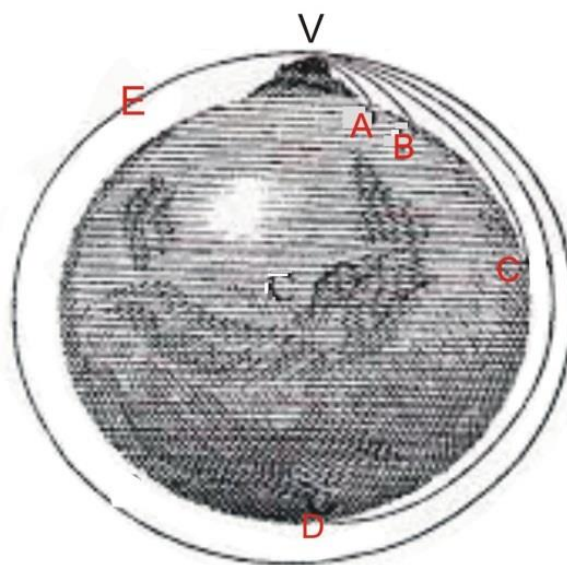
ANEXO 2

CONTRIBUCIÓN DEL TIRO HORIZONTAL A LA SÍNTESIS NEWTONIANA

Una característica importante de la física de Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) fue plantear una separación radical entre dos "mundos": un mundo sub-lunar (o terrestre) imperfecto, perecedero y un mundo supra-lunar (o celeste) perfecto, eterno, inmutable, hecho de una materia especial, sin peso. Se consideraba que estas dos partes del Universo funcionan obedeciendo a leyes diferentes: en el mundo celeste, el Sol, la Luna y las estrellas se consideraba que su estado natural era describir movimientos circulares uniformes de forma permanente alrededor de la Tierra, situada inmóvil en el centro del Universo. En el mundo terrestre cada objeto tendía a moverse en línea recta hacia su lugar natural y a quedarse allí en reposo. Esto llevaba a pensar que las piedras debían caer en línea recta hacia la superficie de la Tierra, tanto más aprisa cuanto mayor fuera su masa y que los gases no pesaban, moviéndose espontáneamente hacia arriba, de forma que para mantener en movimiento un objeto alejándolo de su lugar natural, era necesario la acción de una fuerza.

En la época de Newton (finales del siglo XVII) la Teoría Heliocéntrica de Copérnico (la Tierra y el resto de los planetas son los que giran en torno al Sol) se enseñaba ya en algunas universidades, Galileo con su telescopio había descubierto montañas y valles en la Luna y también que el planeta Júpiter tenía lunas orbitando a su alrededor. Todo ello ya había hecho tambalearse el antiguo sistema, pero fue sin duda la **Teoría de Newton de la Gravitación Universal** la que permitió finalmente una síntesis entre dos mundos hasta entonces completamente distintos.

La ilustración siguiente, similar al dibujo que encontramos en la portada de muchas ediciones de los Principia de Newton, ayuda a ver la contribución que puede hacer el estudio del tiro horizontal a la síntesis newtoniana:

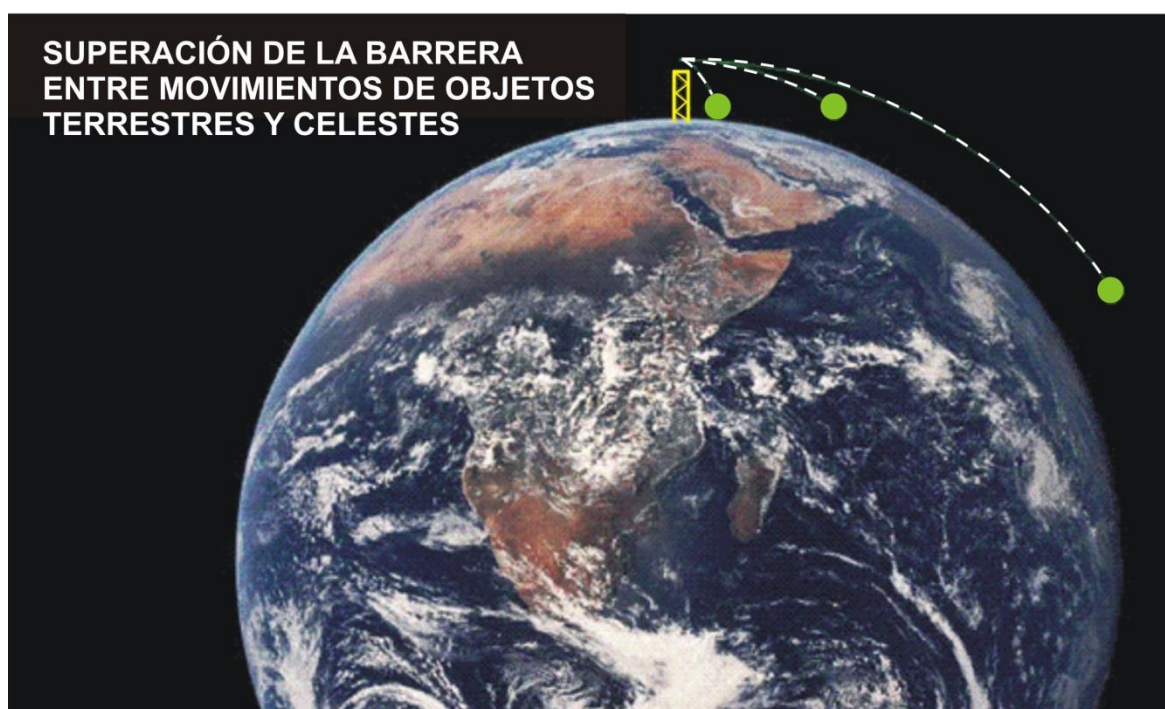


Un objeto lanzado horizontalmente desde una colina V realiza un movimiento parabólico hasta caer en un cierto punto A. Si la velocidad es mayor, el mismo objeto caerá en el punto B, y si se sigue aumentando la velocidad en C, D... hasta que para un valor determinado de la velocidad, el objeto describirá una trayectoria que no intersecta con la Tierra quedando en órbita alrededor de la misma.

En palabras del propio Newton:

«El que un planeta pueda ser retenido en su órbita es algo que podemos comprender fácilmente si consideramos los movimientos de los proyectiles. En efecto, una piedra arrojada, a causa del peso se ve forzada a abandonar la trayectoria rectilínea... viéndose obligada a describir una línea curva en el aire, y merced a este camino torcido se ve finalmente llevada al suelo. Y cuanto mayor sea la velocidad con la que se proyecta, más lejos va antes de caer a tierra. Podemos suponer por tanto que la velocidad se incrementa de tal modo que describa un arco de (muchas) millas antes de llegar al suelo, hasta que finalmente, excediendo de los límites de la Tierra, pasará totalmente sin tocarla».

Para practicar en clase sobre estos conceptos, hemos elaborado otra animación *Modellus*, que reproduce este razonamiento de Newton. Manipulándola, los alumnos pueden entender mejor que no existen diferencias fundamentales entre el movimiento regular de un satélite (un movimiento "celeste") y el de un tiro horizontal que termina chocando contra el suelo (un movimiento "terrestre") cuando se interpretan mediante las leyes de Newton. Se requieren las mismas leyes para estudiar ambos movimientos y es únicamente el valor de la velocidad inicial en relación con la altura del lanzamiento lo que determina que el objeto siga una trayectoria parabólica o circular.



Estos casos y los de otras trayectorias que también son posibles bajo estas condiciones (órbita elíptica, trayectoria hiperbólica abierta,..) se desarrollan con más detalle en 2º curso de Bachillerato, en el tema dedicado al estudio del Campo gravitatorio (ved en el libro de texto Física de 2º de Bachillerato, de libre acceso en: <http://didactica fisica quimica.es/>).

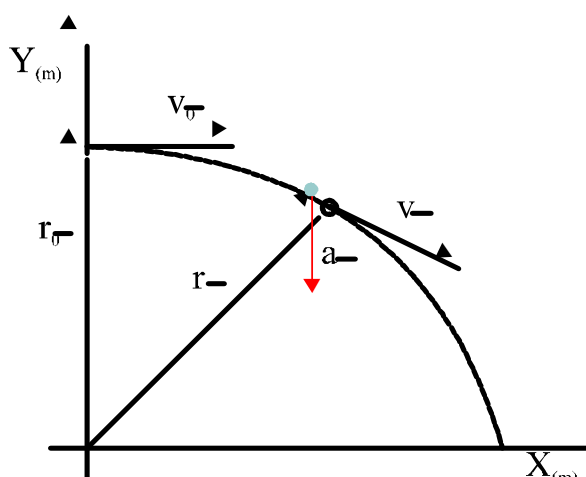
ANEXO 3

OBTENCIÓN TEÓRICA DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO PARA UN TIRO HORIZONTAL Y PARA UN TIRO OBLÍCUO

1. *Obtened las magnitudes características (aceleración, velocidad y vector de posición) correspondientes al movimiento de un cuerpo lanzado horizontalmente.*

En el instante en que se lanza el cuerpo ($t_0 = 0$) las magnitudes características del movimiento presentan los siguientes valores: $\vec{a} = (0, -g)$; $\vec{v}_0 = (v_0, 0)$; $\vec{r}_0 = (0, h)$ y en otro instante posterior cualquiera (comprendido entre el lanzamiento y el momento en que el cuerpo choca contra el suelo) serán:

$$\vec{a} = (0, -g); \quad \vec{v} = (v_x, v_y); \quad \vec{r} = (r_x, r_y)$$



Conocemos el vector $\vec{a}$ y a partir del mismo podemos calcular la velocidad y la posición. Una forma sencilla de hacerlo es trabajar con las componentes cartesianas escalares por separado:

$$\begin{aligned} a_x &= 0; \quad t_0 = 0, \quad v_{x0} = v_0; \quad r_{x0} = 0 \\ a_y &= -g; \quad t_0 = 0; \quad v_{y0} = 0; \quad r_{y0} = h \end{aligned}$$

Si nos fijamos en los datos de la componente X veremos que coinciden con los de un punto que se desplaza a lo largo de OX^+ con un MU, de modo que aplicando las expresiones ya conocidas para este movimiento obtendremos que: $v_x = v_0$; $r_x = v_0 \cdot t$

En cuanto a la componente Y, los datos coinciden con los de un punto que se desplaza a lo largo del eje OY^+ con un MUA y, en consecuencia: $v_y = -gt$; $r_y = h - gt^2/2$

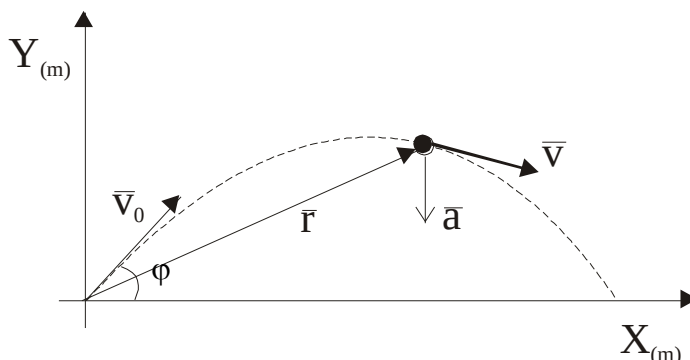
De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de movimiento para el tiro horizontal son:

$$\vec{a} = (0, -g); \quad \vec{v} = (v_0, -gt); \quad \vec{r} = (v_0 t, h - \frac{gt^2}{2})$$

Mediante las dos últimas expresiones es posible calcular la velocidad y la posición del cuerpo lanzado horizontalmente en cualquier instante.

2. Obtener las magnitudes características (aceleración, velocidad y vector de posición) correspondientes al movimiento de un cuerpo lanzado oblicuamente desde el suelo.

Si tomamos como sistema de referencia los ejes de coordenadas cartesianas que se indican en la figura siguiente, las magnitudes características del movimiento en el instante inicial $t_0 = 0$, serán las siguientes:



$\vec{a} = (0, -g)$; $\vec{v}_0 = (v_0 \cdot \cos \varphi, v_0 \cdot \sin \varphi)$; $\vec{r}_0 = (0, 0)$ y en otro instante cualquiera t serán:
 $\vec{a} = (0, -g)$; $\vec{v} = (v_x, v_y)$; $\vec{r} = (r_x, r_y)$.

Como podemos ver, al igual que en el tiro horizontal el vector aceleración permanece constante. Siguiendo un procedimiento similar al allí empleado, determinad las magnitudes características del movimiento a partir de la aceleración y de los valores de la velocidad y el vector de posición en el instante inicial.

$$a_x = 0; \quad t_0 = 0, \quad v_{x0} = v_0 \cdot \cos \varphi; \quad r_{x0} = 0$$

$$a_y = -g; \quad t_0 = 0; \quad v_{y0} = v_0 \cdot \sin \varphi; \quad r_{y0} = 0$$

Si analizamos los datos de la componente x veremos que corresponden a un movimiento uniforme. Si aplicamos las ecuaciones, ya conocidas, para este movimiento tendremos:

$$v_x = v_0 \cdot \cos \varphi; \quad r_x = v_0 \cdot t \cdot \cos \varphi.$$

En cuanto a la componente y , los datos coinciden con los de un movimiento uniformemente acelerado: $v_y = v_0 \cdot \sin \varphi - gt$; $r_y = v_0 t \cdot \sin \varphi - \frac{gt^2}{2}$

En resumen: las ecuaciones del movimiento para el tiro oblicuo considerado, vendrán dadas por:

$$\vec{a} = (0, -g); \quad \vec{v} = (v_0 \cos \varphi, v_0 \sin \varphi - gt); \quad \vec{r} = (v_0 t \cos \varphi, v_0 t \sin \varphi - \frac{gt^2}{2})$$

Mediante las ecuaciones anteriores es posible resolver muchas cuestiones de interés respecto a este tipo de movimiento como, por ejemplo:

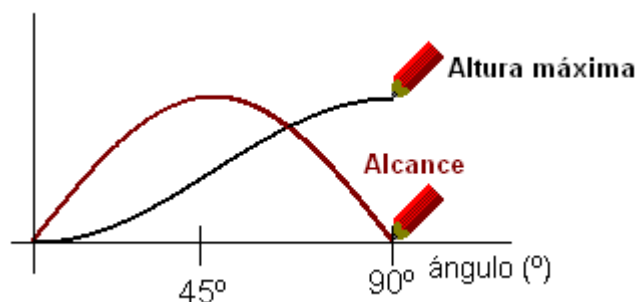
3. Obtener las expresiones del alcance horizontal “ A ” y de la altura máxima “ H ” de un proyectil lanzado oblicuamente con una cierta velocidad inicial $\vec{v}_0$ que forma un ángulo φ con la horizontal (haced la aproximación de ignorar el rozamiento con el aire). ¿Para qué valor de φ serán máximas estas magnitudes?

Rdo.

$$A = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}. \text{ El alcance sería el máximo posible para } \varphi = 45^\circ \text{ (sen } 90^\circ = 1).$$

$$H = \frac{v_0^2 \cdot (\sin \varphi)^2}{g}. \text{ La altura máxima es la mayor posible para } \varphi = 90^\circ \text{ (sen } 90^\circ = 1)$$

Antes de resolver formalmente estas cuestiones, se puede pedir a los alumnos que aventuren a modo de hipótesis cómo puede ser la gráfica de la evolución de cada una de estas dos magnitudes al ir variando el ángulo de lanzamiento entre 0° y 90° . Luego, una vez obtenidas las fórmulas, y como parte del análisis de los resultados obtenidos, se pueden construir tales gráficas, por ejemplo, incorporando las expresiones obtenidas como modelo físico-matemático en un programa de simulación. Así, por ejemplo, al hacerlo con el programa *Modellus*, este nos puede dibujar las siguientes gráficas:



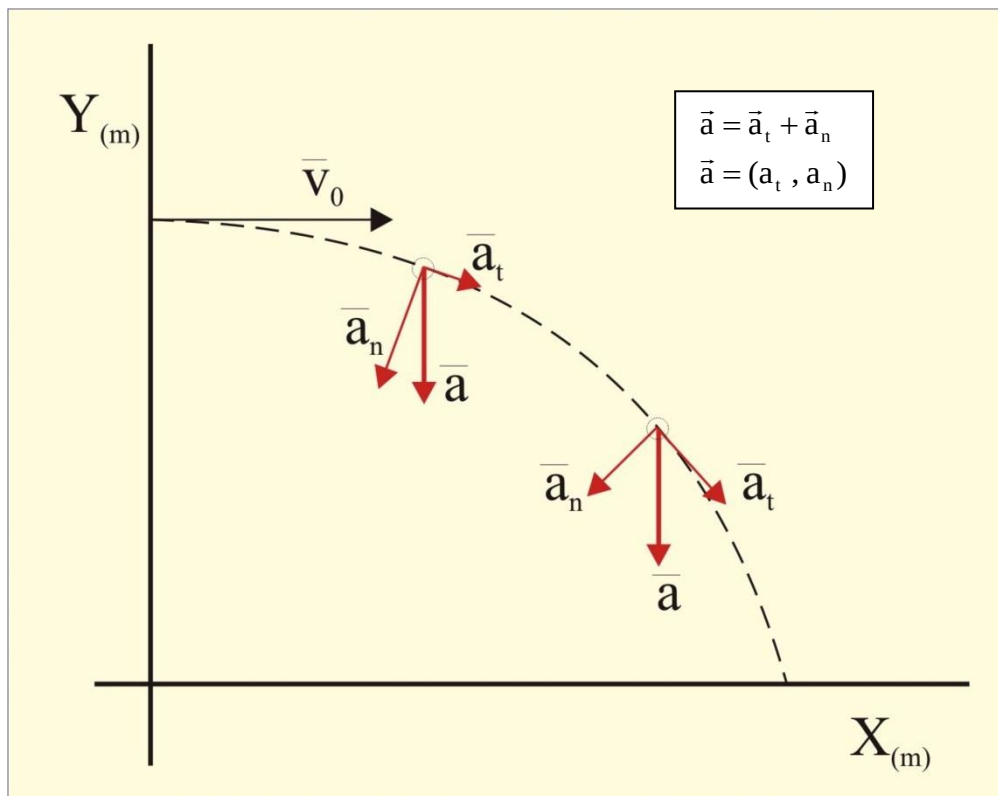
Estas gráficas nos enseñan que alrededor del ángulo al que corresponde el alcance máximo (45°) siempre existen dos posiciones de lanzamiento (a las que corresponden ángulos simétricos con respecto a esos 45°) para cada alcance. Así por ejemplo, se obtendrá el mismo alcance con un tiro “rasante” de 35° que con otro “elevado” de 55° .

4. Como vemos, tanto en el tiro horizontal como en el tiro oblicuo, el vector aceleración permanece constante¹. ¿Significa esto que se trata de movimientos uniformemente acelerados?

La respuesta es que no. En efecto: es fácil ver que al ser la trayectoria curvilínea la tangente y la normal están cambiando constantemente de dirección y como el vector $\vec{a}$ es siempre el mismo, sus componentes tangencial y normal irán cambiando de modo que la aceleración tangencial será variable y, por tanto, estos movimientos **no son** uniformemente acelerados sino variados².

¹ Nos limitamos a situaciones habituales (deportes, etc.) con lanzamientos a una escala en la que se puede considerar perfectamente que la gravedad no cambia.
considerar que la gravedad no cambia.

² Recordemos que el movimiento de un objeto a lo largo de cualquier trayectoria, se define como uniformemente acelerado siempre que la aceleración tangencial correspondiente se mantenga constante durante todo el intervalo de tiempo considerado.



En la figura anterior se ha representado un tiro horizontal con el proyectil en dos posiciones distintas. En ambas se ha dibujado el vector aceleración y sus componentes intrínsecas (aceleración tangencial y normal). Podemos ver que la aceleración es constante ($\vec{a} = \text{cte} = \text{aceleración de la gravedad}$), pero que los vectores componentes aceleración tangencial y aceleración normal van cambiando a lo largo de la trayectoria descrita. Concretamente, la aceleración tangencial va aumentando mientras que la normal disminuye. De este modo se cumple que en todo instante de este movimiento:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \text{cte} = g$$

La aceleración de estos movimientos (tiro horizontal y tiro oblicuo) es constante en módulo dirección y sentido, pero no lo son sus componentes intrínsecas, que van cambiando continuamente de valor.