LEYES DE ENFRIAMIENTO Y CALENTAMIENTO

ENFRIAMIENTO

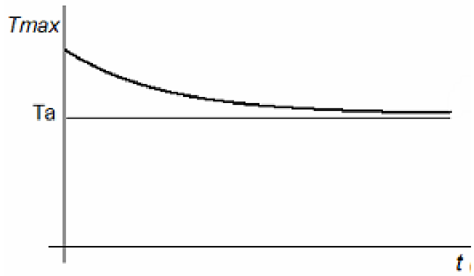
Se saca un bollo de un horno caliente y se deja encima de un plato. ¿Qué temperatura alcanza?, ¿Cómo evoluciona su temperatura?

Hipótesis

Cabe esperar que la temperatura del bollo descienda paulatinamente y que el descenso dependa de factores característicos del bollo (masa, capacidad calorífica,…), de la diferencia entre la temperatura y la temperatura ambiente, T-Ta, y del tiempo transcurrido, Δt. Más precisamente planteamos que:

$\Delta T = -k \cdot (T - T_a)\Delta t$ (k engloba a los factores característicos del bollo)

Puesto que el enfriamiento del bollo se debe a la diferencia de temperatura con el ambiente y, en cada instante, la temperatura T es diferente, la relación entre el enfriamiento y el tiempo transcurrido no es lineal. La magnitud del enfriamiento es cada vez menor y la temperatura tiende a alcanzar la temperatura ambiente, tal como indica la gráfica adjunta.



Estrategia de resolución

Como la relación entre el descenso de temperatura y el intervalo de tiempo transcurrido no es lineal, se precisa utilizar el cálculo diferencial para resolver el problema. Planteamos una diferencial de temperatura basada en la hipótesis anterior. Para un intervalo de tiempo $\Delta t = dt$, la dT es la estimación lineal tangente del descenso de temperatura, es decir, el incremento negativo de temperatura que tendría lugar si la pendiente de T no cambiara:

$$dT = -k \cdot (T - T_a)dt \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Resolución propiamente dicha

El teorema fundamental del cálculo nos aporta dos procedimientos para resolver la expresión:

1) Obtener la anti-derivada de la temperatura respecto del tiempo (La constante de integración se obtiene teniendo en cuenta que para $t=0$, $T=T_{max}$).

2) Agrupar en el primer miembro de la igualdad los términos dependiente de T y en el otro miembro los dependientes de t, antes de calcular una integral definida entre $t=0$ ($T=T_{max}$) y $t \rightarrow \propto$ ($T \rightarrow T_a$).

$$\int_{T_{\max}}^{T} \frac{dT}{T - T_a} = \int_0^t -k \cdot dt \rightarrow \ln(T - T_a)\Big|_{T_{\max}}^{T} = -k \cdot t\Big|_0^t \rightarrow \frac{T - T_a}{T_{\max} - T_a} = e^{-kt} \rightarrow T = T_a + (T_{\max} - T_a)e^{-kt}$$

Finalmente, conviene comprobar que la expresión obtenida verifica las hipótesis planteadas y los casos límite (para t=0, se obtiene $T = T_{max}$, para $T \rightarrow \propto$, se obtiene $T=T_a$)

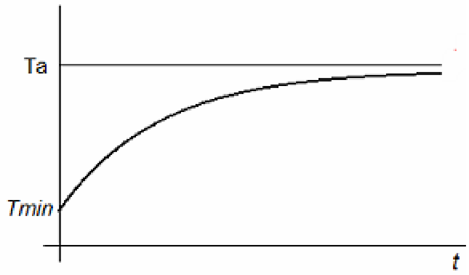
CALENTAMIENTO

Se saca un pescado del frigorífico y se deja encima de un plato. ¿Qué temperatura alcanza?, ¿Cómo evoluciona su temperatura?

Hipótesis

El planteamiento es idéntico al del enfriamiento, teniendo en cuenta que en ahora la diferencia entre la temperatura del pescado y la temperatura ambiente es negativa y el incremento de temperatura del pescado es positivo. Dicho incremento es:

$\Delta T = k \cdot (T_a - T)\Delta t$ (k engloba a los factores característicos del pescado)



Igual que ocurre con el proceso de enfriamiento la temperatura T del pescado es diferente en cada instante, y la relación entre el calentamiento y el tiempo transcurrido no es lineal. La magnitud de dicho calentamiento es cada vez menor y la temperatura tiende a alcanzar la temperatura ambiente, siguiendo una evolución como la indicada por la gráfica adjunta.

Resolución

Una vez planteada la diferencial (para un intervalo de tiempo $\Delta t = dt$, la dT es la estimación lineal tangente del incremento de temperatura):

$$dT = k \cdot (T_a - T)dt \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = k(T_a - T)$$

Se tienen, como en el caso del enfriamiento, los mismos procedimientos para resolver la expresión (obtener la anti-derivada o agrupar términos y obtener una integral definida. Por cualquiera de ambos procedimientos se obtiene el siguiente resultado:

$$T = T_a(1 - e^{-kt}) + T_{\min} \cdot e^{-kt}$$

Donde se puede comprobar que se verifican las hipótesis y los casos límite planteados (para t=0, se obtiene $T = T_{min}$, para $T \rightarrow \propto$, se obtiene $T=T_a$)