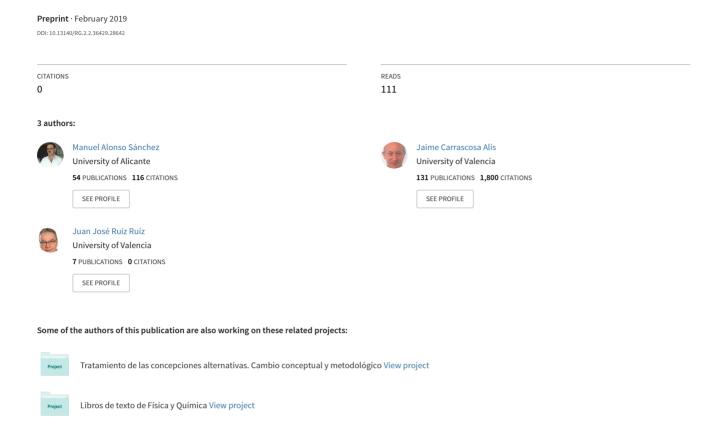
Competencia científica y trabajos prácticos: 2. Caída de graves con rozamiento



¿CÓMO ES EL MOVIMIENTO DE CAÍDA DE LOS CUERPOS CUANDO SE TIENE EN CUENTA EL ROZAMIENTO CON EL MEDIO?

(Manuel Alonso Sánchez, Jaime Carrascosa Alís, Juan José Ruíz Ruíz. 25-febrero-2019)

En el trabajo práctico anterior sobre la caída de graves, se acotó el problema limitando el estudio a los movimientos de caída en ausencia de rozamiento, aunque se pudo ver que, en realidad, la influencia del rozamiento con el aire en el movimiento de caída es muy importante. Nos proponemos ahora ampliar el estudio de dichos movimientos incluyendo este factor.

1. Interés de la situación planteada

A.1. Considerad el posible interés que tiene el estudio de la caída de los cuerpos considerando el rozamiento.

Aunque inicialmente se plantea este trabajo como una ampliación del estudio sobre el movimiento de caída de graves, la caída de cuerpos en el aire es tan sólo un caso particular de movimientos que tienen lugar en el seno de medios fluidos. La notable influencia que ejerce el aire sobre los movimientos de caída y la complejidad que introduce en los mismos, nos ayuda a tomar conciencia de que vivimos sumergidos en un mar de aire (la atmósfera terrestre) y también rodeados de grandes masas de agua. Son muy numerosos los ejemplos de movimientos de distintos objetos que tienen lugar en el interior de estos medios, donde las fuerzas de rozamiento les afectan notablemente, y también son muchos los casos en los que, por diversas razones, interesa intervenir para minimizarlas o bien para aprovecharlas.

Así, por ejemplo, si nos referimos a movimientos en el aire, sabemos que muchos estudios de aerodinámica diseñan perfiles afilados en vehículos, con objeto de facilitar su penetración a través de la atmósfera. Otras veces, en cambio, la influencia del aire se quiere usar positivamente, para lograr algunas aplicaciones notables como, por ejemplo, aprovechar la fuerza de empuje ejercida por el aire para hacer volar globos aerostáticos, las corrientes de aire generadas por las aspas de los helicópteros para mantenerlos en vuelo, su resistencia para poder descender en paracaídas, etc. Igualmente podemos referirnos a los movimientos de cuerpos sumergidos en agua (submarinos), flotando en ella (barcos), etc.

2. Precisión del problema

En el trabajo práctico sobre la caída de graves¹ ya se vio (dejando caer una hoja de papel) que el rozamiento del aire puede producir una enorme complejidad en los movimientos de caída, llegando a convertirlos en ingobernables. Evidentemente es aún mayor la posible influencia del rozamiento del agua sobre los cuerpos que puedan caer sumergidos en ella. Por tanto, aunque ahora se desea estudiar la influencia de este factor, el problema también tiene que ser acotado, ya que los movimientos que estudiemos tendrán que ser suficientemente sencillos para poder aplicarles el nivel de conocimientos disponible.

_

¹ Competencia científica y trabajos prácticos: Caída de graves

A.2. Tratad de acotar el problema para hacerlo abordable.

Nos limitaremos a estudiar situaciones en las que la trayectoria de caída de graves en el medio fluido (aire o agua) sea rectilínea. Para ello habrá que exigir el cumplimiento de unas determinadas condiciones, tanto en cuanto al medio como respecto al cuerpo que cae en el seno del mismo.

En lo que se refiere al medio, hemos de asegurar, por ejemplo, que no haya corrientes o turbulencias que puedan afectar al movimiento de caída del objeto. Así, si queremos estudiar la caída de objetos en el aire, convendrá realizar los experimentos en interiores (en el laboratorio, en el aula, etc.), si queremos estudiar el movimiento de caída de objetos en el agua, convendrá disponer del líquido en un recipiente adecuado donde la masa de agua permanezca estática, etc.

En cuanto al objeto que cae, por una parte ha de ser adecuado para que la fuerza del rozamiento se deje sentir, pero por otra, esta fuerza no deberá variar su trayectoria. Estos condicionantes afectan, por ejemplo, a la forma del cuerpo, ya que para que no cambie de trayectoria deberá tener un perfil aerodinámico o hidrodinámico apropiado.

Si se cumplen estas condiciones (que habrá que concretar con mayor precisión más adelante), podemos acotar el problema en los siguientes términos:

¿Cómo es el movimiento de caída **vertical** de un objeto en el aire (y/o en el agua), teniendo en cuenta la influencia que sobre dicho movimiento ejerce el rozamiento?

3. Planteamiento de hipótesis

A.3. Plantead hipótesis acerca del movimiento de caída vertical de un objeto sumergido en un medio fluido (aire o agua), teniendo en cuenta la influencia del rozamiento.

Es evidente que el medio frena al cuerpo durante la caída, ya que le ejerce una fuerza contraria a su movimiento. Por tanto, los alumnos esperan que el movimiento de caída sea acelerado (como lo es la caída libre en ausencia de rozamiento), pero que la aceleración disminuya por la acción de la fuerza de rozamiento. A partir de aquí, les pedimos que concreten sus hipótesis enumerando posibles factores que pueden afectar a dicha fuerza de rozamiento y a la aceleración de caída del objeto.

Las aportaciones de los alumnos en relación con esta cuestión se pueden sintetizar enumerando los siguientes factores: la forma del objeto, la viscosidad del medio (aunque los estudiantes no conocen formalmente esta magnitud, se refieren a ella de manera imprecisa, cuando dicen que el medio puede ser "más o menos espeso") y la velocidad con la que cae el cuerpo. Más precisamente:

- ✓ Cuanto más aerodinámica (o hidrodinámica) sea la forma del objeto, menor será la fuerza de rozamiento y mayor su aceleración de caída.
- ✓ Cuanto más viscoso sea el medio, cabe esperar que se oponga con una fuerza de mayor intensidad al movimiento de caída del objeto y viceversa.
- Cuanto mayor sea la velocidad del objeto, cabe plantear que le cueste más atravesar el medio, es decir, que el aire o el agua le oponga una fuerza de rozamiento mayor (los alumnos viven bastantes experiencias como remar, ir en bicicleta o, simplemente, sacar la mano por la ventilla de un coche en marcha, que suelen ayudarles a formular esta hipótesis).

Además de considerar estos factores, es muy probable que algunos estudiantes se refieran también al peso (o a la masa) del objeto y/o a su densidad (comparada con la del medio), como otros factores que influyen en la caída. Intuyen que no cae en el aire de la misma manera, por ejemplo, una bola maciza de aluminio que otra de espuma que tenga el mismo volumen, pero, aunque conozcan ya el principio de Arquímedes, suelen achacar esto únicamente a fuerzas de rozamiento diferentes y raramente mencionan como factor influyente a la fuerza de empuje (que no afecta a la fuerza de rozamiento, pero sí puede influir notablemente en el movimiento de caída). En esos casos, será necesario recordarlo y tener en cuenta también dicha fuerza. Esto es lo que se plantea en la siguiente actividad:

A.4. Repasad el principio de Arquímedes, intentando clarificar su posible influencia en el problema que nos ocupa.

Después de recordar el enunciado del principio de Arquímedes, se trata de identificar la fuerza de empuje y diferenciarla claramente de la fuerza de rozamiento.

Conviene pues recordar que la fuerza de empuje se ejerce en dirección vertical y sentido ascendente sobre todo cuerpo sumergido en cualquier fluido (mientras que la fuerza de rozamiento lo hace en sentido contrario al movimiento del cuerpo, sea este descendente o no) y que su módulo es constante e igual al del peso de fluido desalojado por el cuerpo, es decir:

$$E = m_{fd} \cdot g = d_f \cdot V \cdot g$$

En la expresión anterior, E es el módulo del empuje, g la gravedad, m_{fd} la masa de fluido desalojado por el cuerpo, d_f la densidad del fluido y V el volumen del cuerpo (que suponemos totalmente sumergido y que coincide con el volumen de líquido desalojado).

A la vista de su expresión operativa, vemos que, en nuestro problema, la fuerza de empuje va a ser tanto más influyente cuanto mayor sea la densidad del fluido (en comparación con la del cuerpo que cae).

Aclarado esto, los alumnos recuerdan algunas aplicaciones que conocen de este concepto, particularmente el hecho de que los cuerpos sumergidos en agua se hunden (caen dentro del agua) cuando su densidad es mayor que la del líquido (o, lo que es equivalente: cuando el peso es mayor que el empuje), pero ascienden y terminan flotando sobre la superficie del líquido cuando su densidad es menor (el empuje es mayor que el peso, como ocurre, por ejemplo, con el corcho). Para ayudar a que se vea también la influencia de esta fuerza de empuje en el aire, podemos pedirles que mencionen algunos objetos que ascienden en él, lo que remite, por ejemplo, a los globos de juguete (llenos de helio).

El repaso de estos conceptos permite tomar conciencia de la presencia de la fuerza de empuje en la caída de objetos, sea en el agua o en el aire. Debe quedar claro que es una fuerza ascendente, independiente de la fuerza de rozamiento, y de módulo constante (para cada objeto).

Además, conviene destacar el hecho de que la intensidad del empuje (y, por tanto, su posible influencia en el movimiento de caída) se puede controlar fácilmente, eligiendo el material de que esté hecho el objeto. Si, por ejemplo, queremos hacerlo despreciable convendrá elegir un cuerpo de densidad suficientemente grande comparada con la del medio. En el aire, esta condición la cumplen muchos materiales cotidianos. En cambio, si queremos que sí que influya (por ejemplo, para hacer que la caída sea más lenta), nos interesará elegir

otro objeto, de densidad cercana a la del medio. En general, esto será más sencillo de realizar en el agua.

En todo caso, será importante controlar la forma del objeto procurando que sea la más idónea para garantizar una caída vertical y, también, como ya se ha indicado, hay que asegurarse de la ausencia corrientes en el medio, con el mismo fin.

De acuerdo con todo lo expuesto, el objetivo de este trabajo será investigar cómo influye en el movimiento de caída el rozamiento del medio, en condiciones tales que podamos controlar o hacer despreciable a la fuerza de empuje y que la caída se realice verticalmente. Más concretamente: se trata de analizar cómo evoluciona la velocidad de caída en función del rozamiento, cuando se cumplen tales condiciones.

4. Elaboración de diseños experimentales

A.5. Proponed posibles diseños experimentales para estudiar el movimiento de caída vertical de objetos en un medio fluido (aire o agua), más concretamente, para estudiar la evolución de su velocidad, una vez controlados el resto de factores intervinientes.

Los diseños experimentales plausibles son diferentes según se trate de estudiar la caída de objetos en el aire o en el agua. La diferencia existente entre la densidad de uno y otro medio, es evidente que condiciona al objeto que conviene utilizar y además ocurre que en el aire se pueden usar algunos instrumentos de medida, que no se pueden sumergir en agua.

Comenzamos refiriéndonos a un posible diseño experimental para estudiar el movimiento de caída en el aire. Como se quiere medir, con la mayor precisión posible, la evolución de la velocidad durante una caída que, a lo sumo, puede llegar a ser de entre uno y dos metros de longitud, resulta necesario utilizar un instrumento de precisión, como es el caso del sensor de movimiento. En cuanto al objeto, se ha de elegir de forma que no cambie su trayectoria vertical por la influencia del rozamiento, pero sí se vea afectado suficientemente por él durante la caída. Por otra parte, si los alumnos están familiarizados con el funcionamiento de los sensores, saben que para determinar posiciones este instrumento emite pulsos de un haz cónico de ultrasonidos. Dicho haz rebota en el objeto y vuelve hacia el propio sensor, lo que permite (después de determinar el tiempo de ida y vuelta de cada pulso) obtener el valor de la posición. Por todo ello, conviene que el cuerpo que se deje caer en el aire ofrezca al sensor (que se puede colocar en el techo o en el suelo) una superficie plana. Un objeto que cumple con todos estos requisitos, es un recipiente de plástico cerrado, como los que se usan cotidianamente para guardar alimentos en la nevera.



Por tanto: se trataría de dejar caer tal recipiente de plástico encima de un sensor de movimiento desde aproximadamente un metro y medio de altura, registrar la evolución de las posiciones que va ocupando durante la caída y analizar el tipo de movimiento, comparándolo con el de una caída libre en ausencia de rozamiento (**diseño experimental 1**).

El diseño anterior es impracticable para estudiar el movimiento de caída de ningún objeto sumergido en agua, porque el sensor no se puede sumergir en el líquido, ni tampoco puede tomar medidas a través de él. Sin embargo, el hecho de que el agua sea transparente nos brinda la posibilidad de observar visualmente o con una cámara la caída de objetos dentro de ella, siempre que esa agua esté contenida a su vez en un recipiente transparente (por ejemplo, de vidrio). Teniendo esto en cuenta, si los alumnos ya han realizado otros trabajos prácticos usando simulaciones y su comparación con la filmación de movimientos (véase, por ejemplo, el trabajo práctico anterior² sobre la caída de graves), pueden plantear el traslado de esta técnica aquí.

En este caso, se trataría de llenar de agua un recipiente de vidrio (por ejemplo una probeta), dejar caer un cuerpo adecuado dentro del líquido y filmar su movimiento. Seguidamente habría que elaborar una animación que simule el movimiento de caída del cuerpo sumergido (de acuerdo con las hipótesis planteadas acerca del mismo) y se compararía el movimiento de caída real (filmado) con el movimiento virtual simulado (diseño experimental 2).



5. Realización y análisis de experimentos sobre el movimiento de caída en el aire

A.6. Proceded a realizar el experimento, dejando caer un recipiente de plástico sobre el sensor de posición. Analizad los resultados obtenidos y extraed conclusiones acerca del movimiento, comparándolo en particular con la caída libre en ausencia de rozamiento.

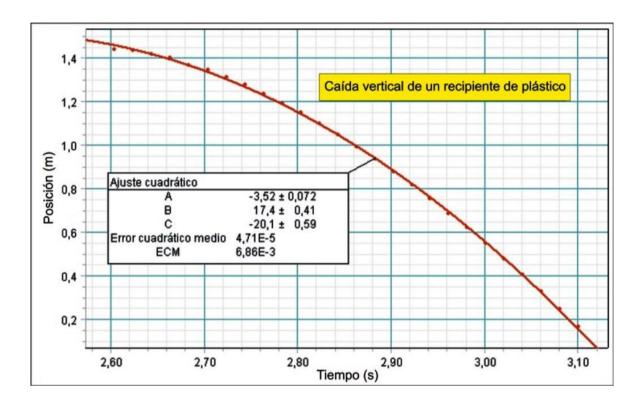
Interesa que realicen el experimento varios grupos de alumnos, para mostrar que, después de que hagan en la gráfica un ajuste cuadrático (acorde con su hipótesis de un movimiento acele-

_

² Competencia científica y trabajos prácticos: Caída de graves

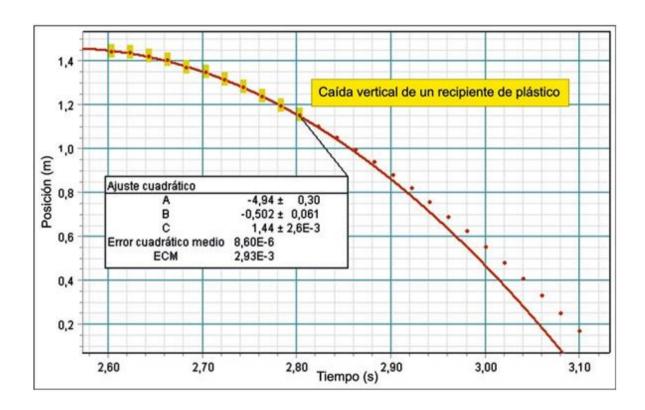
rado), todos obtienen, en una caída de poco más de un metro de altura, un valor de la aceleración media durante la caída, que, dependiendo del recipiente utilizado y de la altura total recorrida, puede estar entre 7 m/s^2 y 9 m/s^2 . Como cabía esperar, esta aceleración es inferior a la que correspondería a una caída libre en ausencia de rozamiento $(9'8 \text{ m/s}^2)$.

A modo de ejemplo, la imagen siguiente recoge la gráfica obtenida (incorporado en ella el ajuste cuadrático) por un grupo de alumnos de 1º Bachillerato en el IES "Leonardo da Vinci" de Alicante. En este caso, los estudiantes colocaron el sensor en el suelo (en estas condiciones el recipiente cae acercándose al sensor y su aceleración es negativa) y, como se observa, el módulo de la aceleración media obtenida fue de 7'04 m/s² (igual, salvo el signo, al doble del coeficiente A del ajuste).



En primera instancia, podríamos sorprendernos de esta disminución tan apreciable de la aceleración en comparación con la que correspondería a un movimiento de caída libre en ausencia del rozamiento. Sin embargo, el resultado adquiere sentido cuando lo relacionamos con la hipótesis acerca de la influencia de la velocidad en la fuerza de rozamiento. En efecto, los resultados que ya se conocen sobre el movimiento de caída de graves en ausencia de rozamiento (en particular el valor de g), han enseñado que tras un recorrido de poco más de un metro, la velocidad de caída libre alcanza un valor elevado. Por tanto, aceptando la hipótesis de que la fuerza de rozamiento debería aumentar al aumentar la velocidad, se entiende mejor que, en la caída del recipiente de plástico, es bastante lógico que disminuya de forma apreciable la aceleración.

De acuerdo con esto también se puede prever que, como en el tramo inicial del movimiento la velocidad todavía no es tan alta, posiblemente ahí la aceleración sí sea del orden del valor conocido de g. Para comprobarlo podemos pedir a los estudiantes que seleccionen en la gráfica unos pocos de los valores iniciales (ésta es una herramienta muy interesante que tiene el software de los sensores). La siguiente imagen muestra el resultado que se obtuvo, tras esta manipulación de la gráfica anterior:



Se ve muy claramente, que en los primeros 0'2 s (correspondientes a los primeros 20-30 cm de caída), la aceleración obtenida sí fue del orden de 9'8 m/s² (el doble del coeficiente A del ajuste). Pero a partir de ahí, los puntos se desvían de esa caída teórica que tendría lugar si el rozamiento fuera despreciable, evidenciando un decrecimiento progresivo del valor absoluto de la aceleración.

A la vista de estos resultados se suscitan nuevas e interesantes preguntas.

A.7. ¿Cómo cabe esperar que sea el movimiento de caída de graves a medida que sigue aumentando la fuerza de rozamiento?

Durante la caída compite la fuerza gravitatoria (que podemos considerar constante en esta pequeña altura), con la fuerza de rozamiento, la cual, como acabamos de ver, crece progresivamente al aumentar la velocidad del objeto. Por tanto, ha de llegar un momento en que ambas fuerzas se equilibren. A partir de ese instante concreto, el movimiento debería ser uniforme a una **velocidad límite**.

A.8. Diseñad y llevad a cabo un experimento, similar al recién realizado, para obtener el valor de la velocidad límite que, según lo visto en la actividad anterior, debería alcanzar un objeto cayendo en el aire.

Los estudiantes suelen plantear básicamente dos tipos de diseño experimental.

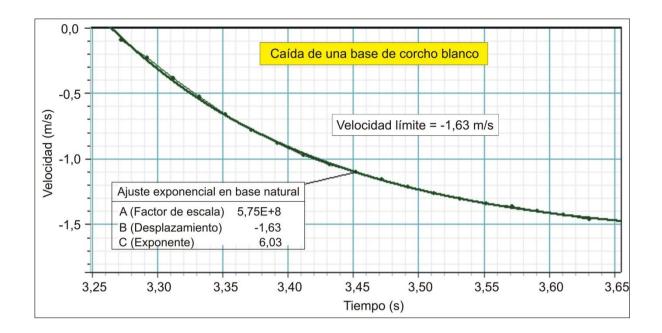
El primero se basa en aumentar todo lo posible la altura inicial, con el fin de dar tiempo y recorrido suficiente al objeto que cae para que se alcance una fuerza de rozamiento que compense su peso. Bastan unas pocas tentativas para comprobar las dificultades que introduce este tipo de diseño. De entrada, no es fácil disponer de un lugar idóneo para producir caídas de mucha altura y, si lo tuviéramos, sería muy difícil lograr que los objetos descri

ban una trayectoria tan grande vertical (sin desviarse). Se ha de recordar también que al tomar sus mediciones el sensor de posición dirige varias señales enfocadas a lo largo de un haz ultrasónico y luego extrapola un valor para la distancia (por eso conviene ofrecer al sensor superficies planas). El área de acción del sensor aumenta al alejarnos de él y para medir distancias superiores a 1'5 m la superficie del objeto que se le enfrenta tendría que aumentar excesivamente.

El segundo diseño se basa en usar un cuerpo que alcance más rápidamente la velocidad límite, procurando al mismo tiempo que experimente una caída realmente vertical, no desviada por el aire. Para ello interesa ahora que disminuya la masa el objeto, que aumente la superficie plana del mismo que se enfrenta al sensor y atraviesa el aire y que su densidad también sea más cercana a la del aire. Todo ello, con objeto de lograr que, desde el inicio, la velocidad de caída sea menor. En un experimento realizado en el IES "Leonardo da Vinci" de Alicante, después de hacer pruebas con diversos objetos, los equipos comprobaron que cumplen bastante bien estos requisitos pequeñas bases de espuma o de corcho blanco. También observaron que es necesario realizar varios lanzamientos hasta poder elegir uno en el que la base de espuma o de corcho no oscile al caer y que conviene limitar el recorrido de la caída a una altura aproximada de poco más de 1m. En la foto siguiente vemos a una alumna a punto de dejar caer una base de corcho blanco desde una altura, no muy grande, pero suficiente para que se puedan extraer buenas conclusiones de los resultados experimentales.



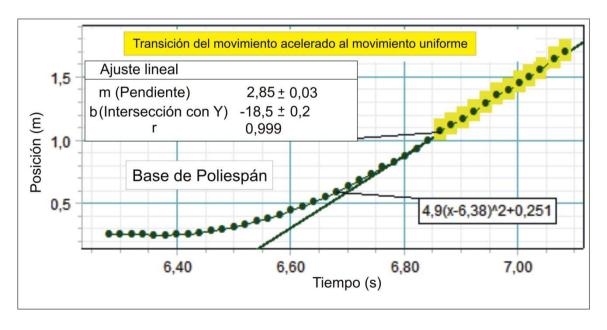
La figura siguiente muestra la gráfica que obtuvieron los alumnos, usando la base de corcho blanco, y su análisis:



Como se ve, para obtener la velocidad límite se realizó un ajuste exponencial en base natural, es decir, una función de la velocidad del tipo: $v = A \cdot e^{-Ct} + B$

En la ecuación anterior, la constante *B* representa a la velocidad límite (valor de la velocidad cuando el tiempo tiende a infinito). Así se obtuvo una velocidad límite de -1'63 m/s. También se repitió el experimento dejando caer una base de espuma, obteniendo en ese caso una velocidad límite de -2'35m/s.

Mostramos ahora otro resultado muy interesante, por cómo se realizó el análisis para destacar la transición que se produce desde el movimiento acelerado al movimiento uniforme con la velocidad límite. El trabajo práctico lo realizaron alumnos de 1º Bachillerato dirigidos por el profesor Mikel Etxanitz en la Ikastola "Pasaia-Lezo" en Guipúzcoa. Colocaron el sensor en el techo y realizaron dos ajustes en la gráfica experimental de la posición. En el primero exigieron la ecuación de un movimiento de caída uniformemente acelerado de aceleración igual a 9'8m/s².



Como se observa, este ajuste se adecuó perfectamente al primer tramo del movimiento. El segundo ajuste (lineal), se hizo para corresponder al tramo de movimiento posterior, una vez alcanzada la velocidad límite. Como se ve, también se adecuó perfectamente a dicho movimiento uniforme de velocidad 2'85 m/s (igual a la pendiente de la gráfica).

Para terminar este apartado, podemos pedir a los alumnos que consulten bibliografía sobre las velocidades límite de caída en el aire de diferentes objetos. La tabla adjunta recoge algunos valores de objetos cotidianos. Su análisis ayuda a entender, por ejemplo, por qué es necesario usar paracaídas, lo peligroso que puede resultar el granizo (si tenemos en cuenta que la fuerza ejercida por una bola de granizo al chocar es igual a la disminución brusca de su cantidad de movimiento, igual al producto de su masa por su velocidad) o que, a estos efectos, la lluvia es inofensiva.

Velocidad límite aproximada en la caída vertical de algunos objetos		
Objeto	Velocidad (m/s)	Velocidad (km/h)
Paracaidista con el paracaídas cerrado	60	216
Paracaidista con el paracaídas abierto	5	18
Pelota de tenis	42	151'2
Balón de baloncesto	20	72
Granizo	14	50'4
Pelota de ping-pong	9	32'4
Gota gorda de lluvia (15 mm de radio)	7	25'2

6. Realización y análisis de experimentos sobre movimientos de caída en el agua

Como ya se comentó en el trabajo práctico anterior sobre la caída de graves, existen algunos programas informáticos libres y muy sencillos de usar, que permiten simular cualquier tipo de movimiento. Para hacerlo, los alumnos han de escribir en una ventana las ecuaciones (de acuerdo con las hipótesis enunciadas) y en otra las condiciones iniciales del movimiento. Seguidamente colocarán en la pantalla una partícula configurándola para que obedezca a esas ecuaciones y también pueden imponer que su movimiento por la pantalla deje un rastro estroboscópico. Para terminar la animación, pueden incorporar y o usar diversas herramientas: vectores de las magnitudes, medidores, cursores para modificar sobre la marcha las magnitudes variables, etc. Todo esto se puede hacer en concreto con el programa *Modellus* (versiones 2.5 y/o 3) y con el programa *Tracker*, los cuales además permiten que se inserte en la pantalla un video, en este caso, del propio movimiento.

Se trata ahora de aplicar estas herramientas al estudio del movimiento de caída de un objeto sumergido en agua. Para ello, empezamos por pedir a los alumnos que concreten detalles sobre el diseño experimental e intenten adecuar sus hipótesis sobre el movimiento a esta situación.

A.9. Concretad algunos detalles técnicos a tener en cuenta para que, después de filmar el movimiento de caída de un objeto sumergido en agua, se pueda comparar su imagen en la pantalla (es decir, el movimiento real filmado) con la imagen en la misma pantalla del movimiento virtual o teórico (simulado). Concretamente, ved qué tipo de recipiente convendrá

elegir para contener el agua y qué objeto podría ser adecuado para sumergirse y estudiar su movimiento de caída. Finalmente, pensad también, a modo de hipótesis, cómo cabe esperar que sea el movimiento de caída en estas condiciones.

En principio, será adecuado cualquier recipiente de vidrio (debido a su transparencia) con una altura suficiente para que el cuerpo tenga una caída de bastante longitud. Un recipiente que cumple estos requisitos es una probeta de vidrio alta de las que existen en los laboratorios escolares. Tiene además la ventaja de estar graduada, lo que puede facilitar la lectura de posiciones durante la caída. En cuanto al objeto que conviene sumergir en el agua, lo más idóneo es una bolita, preferiblemente si es de un material con una densidad no muy superior a la del agua.

La bolita, además de caber bien dentro de la probeta, tiene una superficie esférica y esto ayuda a que su descenso pueda seguir una trayectoria vertical, ya que se ve menos afectada que otras formas por las corrientes de agua que la propia bola genera mientras desciende por el líquido.

Si se eligen estos elementos, al precisar sus hipótesis acerca del tipo de movimiento durante la caída, los alumnos han de tener presente que, como la densidad del agua es mucho mayor que la del aire y, por su parte, la bolita tiene una densidad sólo un poco superior a la del agua (haciendo que los valores absolutos del peso y del empuje sean muy próximos), es lógico pensar que dicha bolita alcanzará muy pronto la velocidad límite y que, por tanto, desde ese momento, su movimiento de caída debería ser uniforme.

Después de haber precisado estos detalles del diseño experimental y de haber afinado la hipótesis acerca del movimiento, se puede pasar a la realización propiamente dicha.

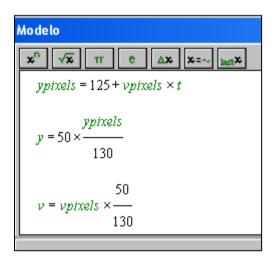
A.10. Proceded a realizar el experimento y a analizar el resultado que se obtenga.

Si los alumnos han utilizado este recurso en trabajos prácticos anteriores (véase el trabajo práctico sobre la caída de graves en ausencia de rozamiento, ya citado en referencias anteriores) están familiarizados con este tipo de diseño experimental y, tras el montaje correspondiente, pasan directamente a realizar las siguientes actividades:

- ✓ Un estudiante deja caer la bolita dentro del agua (después de realizar varias pruebas, se constata que para que no se generen turbulencias en el líquido y el movimiento sea rectilíneo, se ha de depositar con mucho cuidado la bola encima de la superficie del líquido) y otros lo filman con una cámara sencilla (sirve cualquier cámara de un teléfono móvil). Como van a comparar el movimiento filmado con una animación del mismo en la pantalla de un ordenador se debería incluir la señalización de una longitud de referencia visible a la cámara para que el programa establezca una relación entre distancia y número de pixeles en la imagen, si bien en este caso no es necesario marcarla expresamente, porque se conoce la altura de la probeta.
- ✓ Seguidamente, los equipos insertan el video en la simulación y obtienen la equivalencia entre *píxeles* y *metros* en la pantalla.

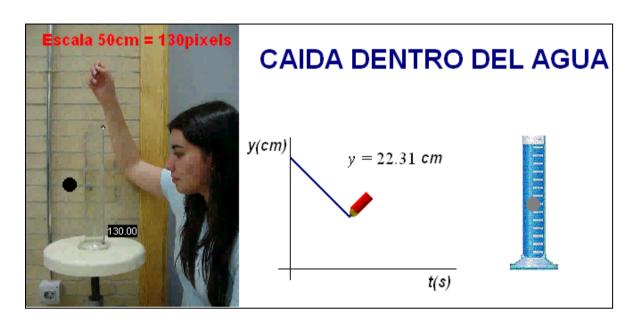


✓ Escriben las ecuaciones que, de acuerdo con sus hipótesis deberían regir el movimiento y colocan en la pantalla de la animación una bolita virtual exigiéndole seguir ese tipo de movimiento (en *píxeles* en la pantalla). Recordemos que, en este caso, como se espera que la bola alcance casi desde el inicio la velocidad límite, escribirán las ecuaciones de un movimiento uniforme, para comparar el movimiento real con el filmado desde ese instante. En dichas ecuaciones dejan como variable la velocidad de caída (la velocidad límite), que es precisamente la magnitud a determinar [representada en el cuadro adjunto como v (en metros) o vpixels (en pixeles)]



✓ Después de añadir otros elementos que enriquezcan la animación (por ejemplo, se puede incorporar una gráfica tiempo-posición, una imagen virtual de la probeta, etc.), analizan la posible concordancia entre el movimiento real (filmado) y el movimiento teórico (simulado) para contrastar sus hipótesis. A tal fin, pueden ir variando el valor "v" de la rapidez lineal hasta que consigan dicha concordancia o, como se supone que el movimiento será uniforme, también pueden prever el valor de "v", simplemente dividiendo la distancia total recorrida por la bola entre el tiempo que dura la caída.

Las dos siguientes imágenes muestran sendas secuencias de las animaciones construidas por un grupo de alumnos de 1º Bachillerato en el IES "Leonardo da Vinci" de Alicante y por profesores en un curso de formación docente realizado en 2018 en el Cefire Específico de Ciencias, Tecnología y Matemáticas de Valencia. En ambos casos se constató que la bolita virtual (negra) acompañaba a la bolita real que desciende sumergida dentro de la probeta para un movimiento teórico uniforme, cuya velocidad y cuya posición en cada instante se calculó con la propia animación, aunque conviene saber que en estos resultados cuantitativos existe una imprecisión de entre un 5% y un 10%, debida al ajuste realizado al establecer la equivalencia entre *metros* y *pixeles* y la indeterminación al comparar la ubicación de la bolita virtual con la real).





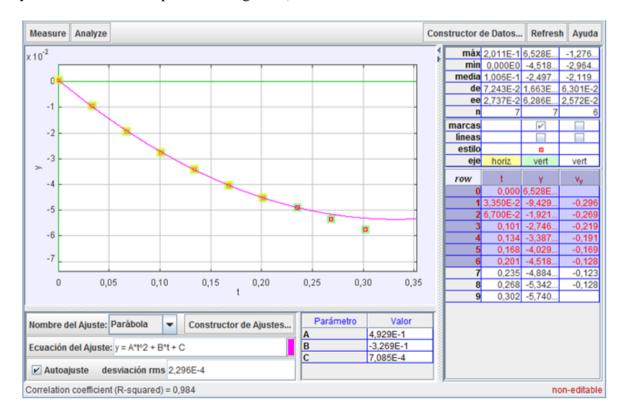
Como vemos, en los dos casos se incluyó en la pantalla la gráfica del movimiento, así como un cursor informativo de la altura "y" que va teniendo la bola. Ambos elementos son

dinámicos, es decir, la gráfica se va dibujando instante a instante durante la caída y el valor de la altura que se reporta en la pantalla, también se va modificando para cada instante.

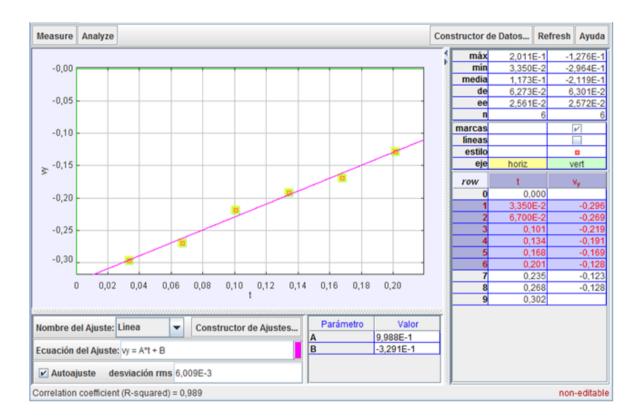
La imagen siguiente corresponde a una secuencia de un experimento similar realizado en 2019 en el Cefire Específico de Ciencias, Tecnología y Matemáticas de Valencia, pero usando el programa *Tracker*.



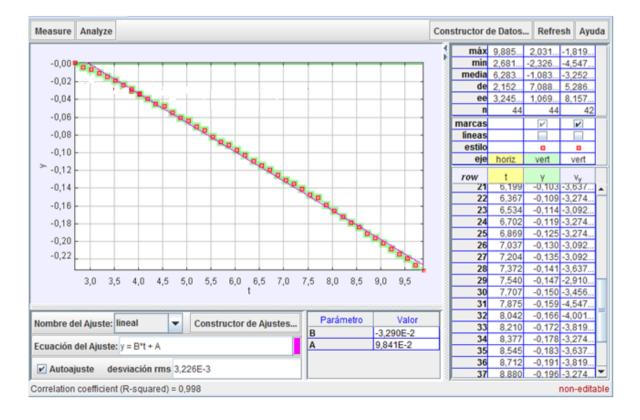
Mientras que en el experimento realizado con *Modellus* que hemos mostrado anteriormente, se realizó el análisis del movimiento desde que la bola alcanza la velocidad límite, en este caso dicho análisis se extendió al movimiento completo, que tiene dos etapas claramente diferenciadas. En la primera de ellas la bola realiza un movimiento acelerado, como muestra el ajuste realizado en la gráfica de la posición (en el que, como se ve, no se incluyeron los dos últimos puntos de la gráfica)



Y, también, el ajuste realizado sobre la gráfica de la velocidad con respecto al tiempo, que se corresponde bastante bien con una relación lineal:



Después de esta etapa inicial, la bola frena bruscamente y realiza un movimiento que es prácticamente uniforme, a la velocidad límite, que, como muestra la imagen siguiente, resultó en este caso igual a -0'0339 m/s.



Al llegar a este punto del trabajo práctico, los alumnos han podido avanzar bastante en el estudio de caída de graves. Así, han comprobado que la influencia de la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento de los cuerpos en el interior de un fluido, depende de la velocidad del sólido respeto del fluido y que, por ello, en el caso de la caída en el aire, los primeros puntos, en los que la velocidad del sólido respeto del fluido es baja, el rozamiento se puede considerar despreciable y el movimiento es uniformemente variado con aceleración próxima a la de la gravedad. También han visto que, dada la influencia creciente de la fuerza de rozamiento a medida que se incrementa la velocidad de la caída y, puesto que esta fuerza variable compite con la fuerza peso (prácticamente constante), se alcanza a partir de un determinante instante una velocidad límite y el movimiento se convierte en un movimiento uniforme, indicando que todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (la fuerza de rozamiento, el peso y el empuje) se anulan entre sí. Finalmente, han visto que el efecto de la fuerza de empuje en los movimientos de caída dentro de un fluido es más intenso cuanto más próximas sean las densidades. Por este motivo, en la caída de una bola dentro del agua se alcanza la velocidad límite casi al inicio y, por ello, desde ese momento casi inicial, el movimiento de caída es prácticamente uniforme.

Estos conocimientos les pueden ayudar ahora a resolver algunos problemas interesantes. Veamos seguidamente uno de ellos.

7. El "supuesto" experimento de Galileo en la Torre de Pisa

Para que los estudiantes puedan analizar la veracidad del experimento de Galileo en la Torre de Pisa, es necesario que antes concreten sus hipótesis acerca de la fuerza de rozamiento (planteadas anteriormente en A.3), llegando a obtener una posible expresión para calcularla.

A.11. Plantead una posible expresión para obtener la fuerza de rozamiento a la penetración de un objeto a través de un medio fluido, teniendo en cuenta las hipótesis que se enunciaron en la A.3 y los resultados obtenidos en este trabajo práctico.

Recordemos que se había planteado que dicha fuerza debería depender de la viscosidad del fluido, de la forma del objeto que cae y de su velocidad a través del medio, siendo, como hemos comprobado tanto mayor la fuerza de rozamiento, cuanto mayor sea dicha velocidad. Para cada tipo de cuerpo y para cada medio, tanto la viscosidad como la forma, se pueden expresar mediante sendas constantes (agrupables, a su vez en una cierta constante, k) y, por tanto, cabe plantear una expresión de la fuerza de rozamiento del tipo:

$$\mathbf{F_r} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{v})$$

Hemos utilizado la negrilla para indicar que estamos manejando vectores. El signo negativo indica que el vector fuerza de rozamiento es opuesto al vector velocidad. En cuanto a la función de la velocidad ha de ser tal que al aumentar v, aumente el módulo de la fuerza de rozamiento, F_r .

Conviene saber que, en general, las situaciones que pueden presentarse suelen ser bastante complejas, debido a que cuando un cuerpo cae en el aire puede verse afectado por corrientes o turbulencias del medio provocadas por la propia fricción. Cuando esto ocurre se dice que el movimiento del cuerpo a través del fluido tiene lugar en un régimen turbulento, mientras que si no sucede, se dice que es laminar. Los estudios en mecánica de fluidos demuestran que una variable que influye en que se produzca uno u otro régimen es la propia

velocidad de penetración del objeto en el medio: Cuando dicha velocidad es inferior a un cierto valor crítico, llamado número de Reynolds, la resistencia del medio puede deberse exclusivamente a fuerzas de rozamiento que se oponen al resbalamiento de unas capas de fluido sobre otras, a partir de una capa límite que queda adherida al cuerpo. Esta sería la situación más sencilla posible, en la cual el régimen es laminar. Entonces, la resultante de las fuerzas de rozamiento se puede considerar proporcional a la velocidad.

Por otra parte, la superficie mínima que puede ofrecer un objeto en régimen laminar es la de una esfera. En ese caso la influencia de dicho objeto queda determinada por el radio de la esfera, R, y la expresión de la fuerza de rozamiento (proporcional a la velocidad) se conoce como ley de Stokes:

$$\mathbf{F_r} = -6\pi R \eta \cdot \mathbf{v}$$
 (η representa a la viscosidad del fluido)

Ahora bien, cuando la velocidad del cuerpo que cae supera este valor crítico, entonces deja de cumplirse la ley de Stokes y la fuerza de rozamiento se expresa mejor mediante otras funciones de la velocidad (la más sencilla, sería una fuerza proporcional al cuadrado de v).

Una vez que los alumnos saben que al dejar caer una esfera en el aire, la fuerza de rozamiento sería proporcional a la velocidad (para velocidades no muy grandes) o proporcional al cuadrado de la velocidad (para velocidades mayores), están en condiciones de analizar la posible veracidad del experimento histórico de Galileo.

A.12. Dice una leyenda que Galileo dejó caer desde la torre de Pisa una bola de madera y otra de acero. Supuestamente algunos testigos observaron que ambas llegaban juntas al suelo. Expresad la aceleración de las bolas y valorad la veracidad de esta leyenda.

En el anexo que figura a continuación del trabajo práctico sobre la caída de graves en ausencia de rozamiento (al cual nos hemos referido ya varias veces), se puede ver que al usar la ley de gravitación, para calcular el módulo de la fuerza de atracción (F_g) entre cualquier cuerpo que cae hacia la Tierra y nuestro planeta:

$$F_g = \frac{G \cdot M_g \cdot m_g}{r^2} = m_g \cdot g$$

junto con la tercera ley de Newton:

$$a = \frac{F_g}{m_i}$$

se deduce que la aceleración de caída es:

$$a = g = \frac{F_g}{m_i} = \frac{G \cdot M_g \cdot m_g}{r^2} = \frac{G \cdot M_g}{r^2} \cdot \frac{m_g}{m_i} = g \cdot \frac{m_g}{m_i}$$

Esta aceleración es la misma para todos los objetos que caen en estas condiciones, debido a que la masa inercial, m_i , y la masa gravitatoria, m_g , son magnitudes equivalentes y, en consecuencia, se compensan, con lo que:

$$a = g = \frac{G \cdot M_g}{r^2}$$

Ahora bien, al aplicar estas mismas leyes a la situación general en la que no se puede considerar despreciable el rozamiento, se obtiene esta otra expresión de la aceleración:

$$a = \frac{F_g - F_r}{m_i} = \frac{m_g \cdot g - k \cdot f(v)}{m_i}$$

Acabamos de ver que la función de la velocidad que puede representar a la fuerza de rozamiento puede ser proporcional a dicha velocidad (por ejemplo, para una esfera, mediante la recién vista fórmula de Stokes), al cuadrado de ésta, etc., y que la constante k no depende de la masa del cuerpo que cae. Por tanto, en la expresión que calcula la aceleración, la masa inercial (m_i) y la masa gravitatoria (m_g) del cuerpo que cae, no se compensan y la aceleración depende de la masa (inercial) de acuerdo con siguiente expresión:

$$a = \frac{m_g \cdot g - k \cdot f(v)}{m_i} = g - \frac{k \cdot f(v)}{m_i}$$

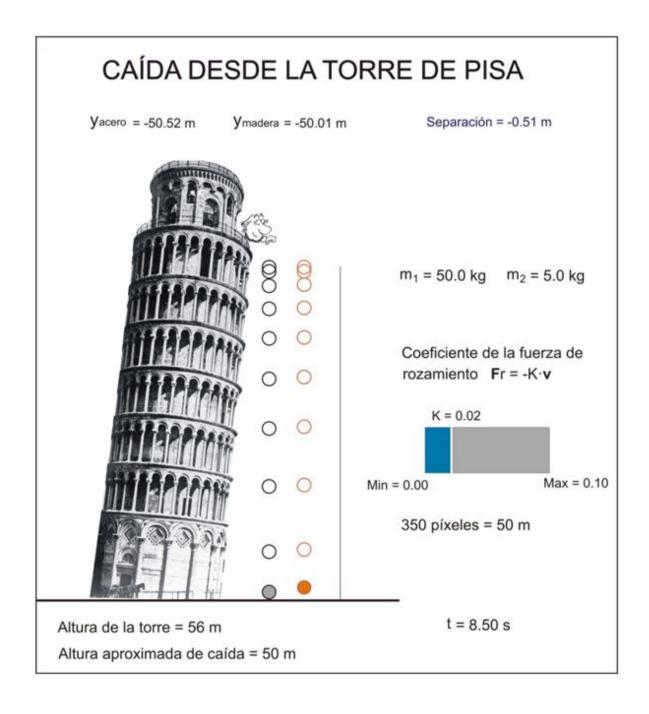
Es decir, para la bola que tenga una masa (inercial) mayor, el segundo término de esta expresión será menor y su aceleración se aproximará más a "g". Por tanto, las dos bolas que supuestamente habría dejado caer Galileo desde la Torre de Pisa no deberían haber llegado al suelo al mismo tiempo.

Lo cierto es que, aunque la leyenda se suele contar diciendo que las dos bolas llegaron juntas al suelo, el propio Galileo, realizara o no el experimento, dijo en sus diálogos que llegaron con uno o dos cúbitos de diferencia (unos 0'5 m), pero destacó que esa diferencia es muchísimo menor que la que se obtendría según Aristóteles, quien había afirmado que si un cuerpo pesa el doble que otro, también cae el doble de rápido. En efecto, en uno de sus diálogos, dirigiéndose a un personaje que representaba las ideas de la época escribió:

"Simplicio, tengo la esperanza de que no seguirás el ejemplo de muchos otros, que desvían la discusión de un punto principal y dicen que algunas de mis afirmaciones se apartan de la verdad por un cabello y por este cabello esconden las faltas de otras teorías tan gruesas como un cable de navío. Aristóteles dice que una esfera de hierro de 100 libras, cayendo desde una altura de 100 cúbitos, llega a tierra antes de que una bola de una libra dejada caer desde la misma altura haya caído un simple cúbito. Yo digo que las dos llegan al mismo tiempo. Tú encuentras al hacer la experiencia, que la más pesada adelanta a la más ligera en dos o tres dedos. Ahora no puedes esconder detrás de estos dos dedos los 99 cúbitos de Aristóteles, ni puedes, mencionar mi pequeño error y al mismo tiempo silenciar el suyo, mucho mayor".

Para reforzar estos razonamientos en clase, hemos recreado este experimento mediante una animación *Modellus*, en cuyo modelo físico-matemático se usan los valores reales de la altura de la torre y de las densidades de las bolas y, para simplificar, se aplica la expresión de una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad a lo largo de toda la caída (dada la altura de la caída y la rapidez con que las bolas adquieren una velocidad elevada, sería más correcto usar esta expresión sólo al inicio de la caída y la de una fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad desde que dicha velocidad alcanza un cierto valor).

Como muestra la figura de la *Caída desde la torre de Pisa*, correspondiente a la secuencia final de la simulación, cuando impacta con el suelo la bola de acero (de color gris), aún le queda un pequeño trecho de 0,51 metros por caer a la bola de madera (de color marrón). Los estudiantes pueden manipular esta animación modificando las masas de las bolas y el valor de la constante, k, de la fuerza de rozamiento, $\mathbf{F_r} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, utilizando el regulador manual que se ve en la pantalla, el cual les permite variar su valor entre 0,0 y 0,10. La diferencia de masa y el coeficiente de la fuerza de rozamiento son los parámetros de los que depende la diferencia de altura entre las bolas al llegar al suelo.



8. Perspectivas abiertas. Nuevos problemas

A.12. Considerad las perspectivas abiertas, susceptibles de originar nuevas investigaciones

Podemos referirnos, entre otras, a las siguientes:

- ✓ Extender los estudios sobre movimientos de cuerpos en el aire a otras situaciones más complejas (aquí nos hemos limitado al movimiento de caída de trayectoria rectilínea), intentando conectar con algunas aplicaciones relacionadas con los estudios sobre aerodinámica (vehículos de carreras, aviones, helicópteros, globos aerostáticos, paracaídas, etc.)
- ✓ Extender los estudios sobre movimientos de cuerpos sumergidos en el agua a otras situaciones, intentando conectarlas con algunas aplicaciones (barcos, submarinos, sondas, buceo, etc.).
- ✓ Realizar un estudio teórico del movimiento de caída considerando el rozamiento, tendente a obtener formalmente sus ecuaciones y la expresión de la velocidad límite.

Conviene, por último, que los estudiantes recojan el trabajo realizado en una memoria de la investigación, planteada como práctica de un aspecto esencial de la actividad científica: la publicación y comunicación de los resultados obtenidos.

9. Memoria del trabajo

A.13. Elaborad una memoria de la investigación realizada

Es preciso dar a esta actividad el sentido de la auténtica comunicación científica, superando su connotación habitual de simple ejercicio escolar, destinado a ser calificado por el profesor. En este sentido, puede ser muy conveniente hacer jugar el papel de "referees" a cada grupo de estudiantes, dándoles a analizar un cierto número de memorias para que sugieran modificaciones a los autores, etc. La publicación de unas *actas* del trabajo realizado durante el curso y la organización de sesiones de *comunicación oral* (con ayuda de proyecciones, vídeos, simulaciones, etc.) y de sesiones *póster*, contribuye a dar interés a este esfuerzo de comunicación, además de proporcionar una visión más correcta del trabajo científico, buena parte del cual está centrado en dicha comunicación.

RECURSOS CAIDA CON ROZAMIENTO

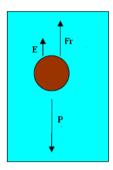
Los experimentos realizados con sensores (incluidos archivos originales de los resultados obtenidos por los alumnos) y con el programa *Modellus* (incluidas todas las animaciones) se pueden consultar y descargar en la Web de materiales didácticos de la Sección Local de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

En esta misma página Web se pueden descargar también las versiones del programa *Modellus 2.5* (para ordenadores de 32 bits) y *Modellus 3* (para ordenadores de 64 bits). La versión *Tracker* 5.0, se puede descargar, de forma totalment libre, desde la dirección https://physlets.org/tracker/ Esta versión està disponible para Windows, Mac OS X, Linux 32-bit i Linux 64-bit.

ANEXO 1

ESTUDIO FORMAL DE LA CAÍDA CON ROZAMIENTO

1) Expresión de la velocidad límite



En función de la densidad del cuerpo, ρ_c , de su volumen, V, y de la aceleración de la gravedad, g, el módulo del peso es:

 $P = m \cdot g = \rho_c \cdot V \cdot g = \rho_c \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot R^3 \cdot g \qquad (R \text{ es el radio del cuerpo esférico y } \rho_c \text{ su densidad})$

Por su parte, el módulo del empuje, expresado en función de las variables homólogas es:

 $E = m_{fd} \cdot g = \rho_f \cdot V \cdot g = \rho_f \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot R^3 \cdot g$ (m_{fd} es la masa del fluido desalojado, ρ_f es su densidad)

En cuanto a la fuerza de rozamiento, siendo el régimen laminar, viene dada por la ley de Stokes, con lo que su módulo es:

$$F_r = 6 \cdot \pi \cdot R \cdot \eta \cdot v = k \cdot v$$
 $(k = 6 \cdot \pi \cdot R \cdot \eta)$

Siendo n la viscosidad del fluido y v el módulo de la velocidad del cuerpo.

Aplicando la ley fundamental de la dinámica de Newton, obtenemos la expresión de la aceleración:

$$a = \frac{\rho_c \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot R^3 \cdot g - 6 \cdot \pi \cdot R \cdot \eta \cdot v - \rho_f \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot R^3 \cdot g}{m}$$

En esta expresión se h adoptado como criterio de signos, aquél que considera positiva dicha aceleración, es decir, positivas las magnitudes vectoriales orientadas en sentido descendente.

Llegados aquí, podemos obtener la expresión de la velocidad límite, simplemente teniendo en cuenta que a partir de que se alcanza dicha velocidad, la aceleración es nula. Es decir, hacemos en la expresión anterior a=0 y despejamos v, con lo que se obtiene:

$$v_{limite} = \frac{2 \cdot g \cdot (\rho_f - \rho_c)R^2}{9 \cdot \eta}$$

Como es lógico, esta expresión confirma que la velocidad límite es mayor (tarda más en alcanzarse) cuanto mayor sea la diferencia entre la densidad del fluido y la del cuerpo, y es menor (tarda menos en alcanzarse) cuando mayor sea la viscosidad del fluido.

2) Expresión de la ecuación de la velocidad

Para obtener la ecuación de la velocidad, empezamos escribiendo la siguiente expresión simplificada de la aceleración:

$$a = \frac{P - F_r - E}{m} = \frac{F - k \cdot v}{m}$$

En la que hemos llamado F a la diferencia entre el peso y el empuje (F = P - E), ya que, para una caída de no demasiada altura, F es constante, como lo son el peso y el empuje.

Tenemos así la siguiente expresión simplificada de la ecuación diferencial de la evolución de la velocidad:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F - k \cdot v}{m} \to m \frac{dv}{dt} = F - k \cdot v$$

Para resolverla, vamos a adoptar el mismo criterio de signos para las magnitudes (según el cual la velocidad será siempre positiva) y a considerar que se pone el reloj en marcha (t=0), exactamente cuando se inicia el movimiento de caída (v=0), con lo que, a partir de la expresión anterior, escribimos:

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{F}{m} - \frac{k}{m}v} = \int_0^t dt$$

Cuya solución es:

$$v = \frac{F}{k} \left(1 - e^{-\frac{k \cdot t}{m}} \right)$$

Este resultado expresa que el módulo de la velocidad, v, aumenta paulatinamente hasta su valor límite, v $_{limite}$ igual a F/k, cuya expresión ya habíamos deducido en el apartado anterior.

$$v_{limite} = \frac{F}{k} = \frac{2 \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_c)R^2}{9 \cdot \eta}$$

Nota: Obsérvese que el criterio de signos utilizado en esta deducción es opuesto al seguido por el software del sensor de movimiento utilizado en el trabajo práctico.

ANEXO 2

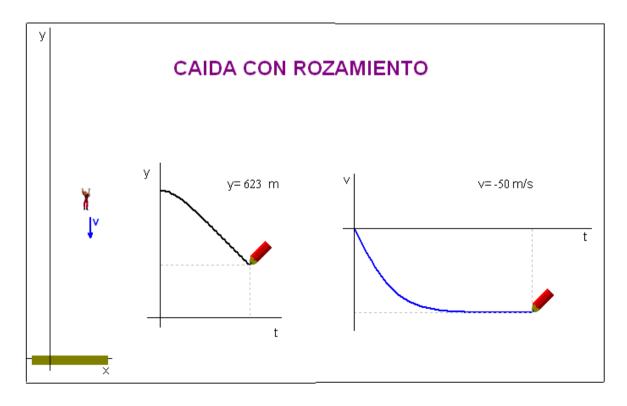
SIMULACIÓN DE LA CAÍDA DE UN PARACAIDISTA

Como se ha visto en el desarrollo del trabajo práctico la velocidad límite para la caída de una persona en el aire se estima en un valor un poco mayor que 50 m/s. Teniendo en cuenta este dato, se puede plantear la siguiente actividad:

Una persona se lanza desde un helicóptero provista de un paracaídas. Suponiendo que al hacerlo el helicóptero está momentáneamente detenido y, que, en consecuencia, su trayectoria vista desde el suelo, es rectilínea y vertical, se pide: a) Representad cualitativamente dicho movimiento señalando, mediante cruces en la trayectoria, posiciones a intervalos iguales de tiempo. b) Dibujad las gráficas de la posición y de la velocidad (cualitativas).



Para corregir esta pregunta hemos elaborado dos animaciones *Modellus* que simulan el movimiento de caída de la persona desde una altura inicial de 1500 m. En la primera de ellas, se supone que no se utiliza el paracaídas. De acuerdo con los conceptos aprendidos en este trabajo práctico, en el modelo físico-matemático de la simulación hemos incorporado una fuerza de rozamiento ejercida por la atmósfera, proporcional a la velocidad mientras la velocidad es pequeña y proporcional al cuadrado de la velocidad cuando ya resulta más elevada. La figura siguiente corresponde a una secuencia intermedia de la caída la animación, que, como vemos, va representando durante la caída las gráficas de la posición y de la velocidad de la persona y también va calculando y dando en la pantalla los valores de ambas magnitudes (la posición decreciente o altura, y, y la velocidad, v) en cada instante.



Es evidente que esta velocidad límite que alcanza una persona al caer es excesiva para que al llegar al suelo sobreviva después del impacto y que, por eso, son imprescindibles los paracaídas. En efecto, cuando se abre un paracaídas se altera notablemente la superficie que se enfrenta a la masa de aire y la atraviesa. Aumenta mucho la fuerza de rozamiento con el aire y se provoca una disminución brusca de la velocidad.

En consecuencia, hemos simulado este cambio que produce la apertura del paracaídas planteando en el modelo físico-matemático de la animación una modificación repentina de la velocidad límite a partir de un cierto instante (el de la apertura del dispositivo). La figura siguiente muestra el resultado que se obtiene e incluye las gráficas solicitadas a los alumnos en la pregunta.

