

como la fabricación de lápices de colores (se emplean pigmentos), los fundamentos de un led, la diferencia entre conductividad eléctrica superficial y transversal, unidades de medida de la conductividad eléctrica, etc. Además, también cabría destacarse la importancia del lápiz para la escritura y el dibujo, lo que daría contenido a la “A” del aprendizaje STEAM.

Conclusiones

La experiencia del empleo del juguete científico conocido como *energy stick*, para evaluar la conductividad eléctrica de objetos cotidianos es motivadora, tanto para alumnos de las distintas etapas educativas como para el público en general. Permite discutir aspectos como la variación de propiedades periódicas en los elementos químicos. Su utilización para diferenciar la conductividad eléctrica de distintos tipos de minas de lápices permite introducir aspectos de ciencia (estructura de la materia, orbitales atómicos, hibridación de orbitales, enlace químico, alotropía...), técnica (diseño de un juguete electrónico, fabricación de lápices, transformaciones de la materia...), historia (desarrollo del lápiz, descubrimiento de nuevos materiales...), lingüística (etimología de palabras cotidianas y técnicas) y arte (como el dibujo). Todo ello, “aliñado” con ciertos toques de humor, puede dotar a las clases y a las exposiciones divulgativas de un entorno formativo lúdico y distendido.

Agradecimientos

Se agradece la ayuda recibida por la Universidad Politécnica de Madrid, a través de los proyectos “Polímeros: del aprendizaje a la investigación, un camino de ida y vuelta” y “*Chemistry in daily life*”, de la convocatoria de “Ayudas a la Innovación Educativa y a la Mejora de la Calidad de la Enseñanza 2023-24”.

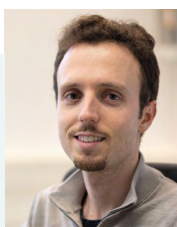
Referencias

- [1] G. PINTO CAÑÓN, Educación STEAM: Análisis de debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades, *Anales de la Asociación Química Argentina* **109** (número extra), 114 (2022).
- [2] G. PINTO CAÑÓN, El laboratorio en casa: ideas para realizar trabajos experimentales con objetos cotidianos, *Educación en la Química* **26** (2), 177 (2020).
- [3] V. ALCÁZAR MONTERO y G. PINTO CAÑÓN, Recursos para la didáctica de las ciencias. En *Experiencias y estrategias de innovación educativa en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (III)*, pp. 11-16, M. González Montero de Espinosa y A. Herráez Sánchez (editores). (Grupo SM, 2023).
- [4] F. I. de AZPEITIA PRADA PÉREZ y J. A. MARTÍNEZ PONS, La física es cool con el *energy stick* y la bola de plasma, *Revista Española de Física* **33** (1), 36 (2019).
- [5] Educational Innovations, *Energy Tube*, <https://short.upm.es/50wrv>.
- [6] G. PINTO CAÑÓN, La tabla periódica como recurso imprescindible para el aprendizaje y la divulgación de las ciencias, *Educación en la Química* **25** (2), 17 (2019).
- [7] Fabricando (canal de Youtube), Cómo se hacen los lápices de grafito, <https://m.youtube.com/watch?v=mm6TieY-8s0>.
- [8] XIII Feria Madrid es Ciencia, Vídeo de la ponencia “Aprendiendo ciencia y tecnología con la mina de un lápiz” (8 de marzo de 2024), <https://short.upm.es/9vc4m>.
- [9] E. GUTIÉRREZ RÍOS, *Química Inorgánica* (Reverté, 1978).
- [10] A. GEIM y K. NOVOSELOV, The rise of graphene, *Nature Materials* **6**, 183 (2007).
- [11] K. A. MADURANI, S. SUPRAPTO, N. I. MACHRITA, S. L. BAHAR, W. ILLIYA y F. KURNIAWAN, Progress in graphene synthesis and its application: History, challenge and the future outlook for research and industry, *ECS Journal of Solid State Science and Technology* **9**, 093013 (2020).
- [12] F. L. ENCKE, The chemistry and manufacturing of the lead pencil, *Journal of Chemical Education* **47** (8), 575 (1970).
- [13] S. CAIN, A. A. CANTU, R. BRUNELLE y A. LYTER, A scientific study of pencil lead components, *Journal of Forensic Sciences* **23** (4), 643 (1978).
- [14] M. C. SOUSA y J. W. BUCHANAN, Observational models of graphite pencil materials, en *Computer Graphics Forum* **19** (1) 27. (2000).

Diagramas de Minkowski para reforzar la comprensión del efecto Doppler

Manuel Alonso Orts

Institute of Solid State Physics, University of Bremen,
Bremen, Alemania



Manuel Alonso Sánchez

Sección Local de Alicante de la RSEF



Se presentan varios desarrollos destinados a estudiar el efecto Doppler con el apoyo de los diagramas espacio-tiempo de Minkowski. Este abordaje del fenómeno ayuda a acceder directamente a algunos hechos fundamentales del mismo, que modifican su interpretación con respecto a la realizada en el marco de la mecánica newtoniana. Así mismo, este ejemplo también resulta útil para reflexionar y comprender mejor la “dilatación temporal”; un concepto derivado de la relatividad especial que suele ser complejo de interpretar.

1. Introducción

Los diagramas de Minkowski son una herramienta muy útil para visualizar y profundizar en los fenómenos asociados a la teoría de la relatividad especial, facilitando la interpretación geométrica del espacio-tiempo. Este artículo los utilizará en el estudio del efecto Doppler. Este abordaje del problema aplicado a las ondas electromagnéticas ayuda a acceder directamente a algunos hechos fundamentales del mismo, que modifican su interpretación con respecto a la realizada en el marco no relativista.

2. Efecto Doppler no relativista

El efecto Doppler consiste en la variación de la frecuencia y de la longitud de onda recibidas respecto de la frecuencia y la longitud de onda emitidas causada por el movimiento relativo entre el foco emisor de las ondas y el receptor. Fue propuesto por Christian Doppler en 1842 [1], si bien Fizeau lo descubrió de manera independiente en 1848 (en Francia se conoce como “efecto Doppler-Fizeau”).

Para visualizar el efecto Doppler se pueden usar *applets* en los que se mueve un foco puntual mientras va emitiendo frentes de onda circulares de una determinada frecuencia y longitud de onda. Cuando ese foco permanece en reposo los frentes de onda emitidos son, respecto a un posible receptor también en reposo, concéntricos alrededor del emisor. El dibujo animado constata que en este caso tienen la misma separación en todas las orientaciones y que, por tanto, en cualquier lugar la longitud de onda y la frecuencia recibidas son iguales a las emitidas: no se produce efecto Doppler (figura 1a). Sin embargo, cuando el foco se desplaza el mismo dibujo animado muestra que los frentes de onda, al irse emitiendo sucesivamente desde diferentes posiciones ($F_1, F_2, F_3, F_4, \dots$), dejan de ser concéntricos para el receptor en reposo, debido a que la velocidad de propagación de una onda no depende del movimiento del foco. En consecuencia, la longitud de onda recibida en las zonas de las que el emisor se aleja es mayor que la emitida, y la recibida en las zonas respecto a las que el emisor se acerca es menor que la emitida (lo contrario le ocurre a la frecuencia) (figura 1b). Todo esto se puede visualizar empíricamente, por ejemplo, generando en una cubeta de ondas frentes de onda sucesivos (figura 1c).

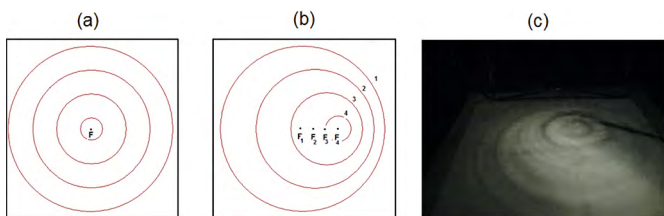


Fig. 1. a) Animación interactiva mostrando que no se produce el efecto Doppler cuando el foco está en reposo (respecto del receptor). b) La misma animación mostrando el efecto con el foco moviéndose respecto del receptor. c) Experimento con la cubeta de ondas (realizado por estudiantes de Bachillerato en el IES Leonardo da Vinci), que muestra los mismos hechos [2].

Una cuestión en la que conviene fijarse es el hecho de que, de acuerdo con los dibujos del *applet*, se tendría efecto Doppler (en mayor o menor grado) en cualquier punto respecto del cual el foco se mueve, excepto, en cada instante, en toda la línea perpendicular a la dirección sobre la que avanza ese foco móvil.

Se pueden hacer desarrollos formales para obtener diversas expresiones algebraicas del efecto Doppler no relativista, dependiendo de cual sea el sistema de referencia adoptado, de la posible oblicuidad o no entre la dirección que une a ambos puntos y la del movimiento del foco emisor de la onda, de los tipos de movimiento (uniforme, acelerado, etc.) que tengan el foco y/o el receptor, etc. (por ejemplo [3, 4]). De todos esos casos posibles vamos a repasar el más sencillo, que considera al emisor y al receptor con movimientos uniformes en la misma dirección, habitualmente llamado “efecto Doppler longitudinal”.

Adoptamos para ello un sistema de referencia anclado al medio de propagación de las ondas (por ejemplo, la atmósfera para la propagación de una onda sonora, o el agua en el ejemplo anterior de la cubeta) y asumimos que el emisor (lo denominaremos $S = \text{“sender”}$) está en reposo respecto a dicho medio, mientras que el receptor (S') viaja con cierta velocidad respecto a S , v_s [puede hacerlo alejándose de él ($v_s > 0$) o acercándose a él ($v_s < 0$)]. Los frentes de onda se desplazan a la velocidad de la onda en el medio, u , y, como las ondas están centradas y sus frentes están equiespaciados respecto del SRI del emisor S , llegan *estirados* al receptor, S' , si se aleja del emisor, S , y *comprimidos* si se acerca.

La frecuencia, f' , recibida por el receptor y la frecuencia, f , emitida por el emisor, en reposo respecto al medio, se relacionan cuantitativamente mediante la ecuación (1), la cual, como es lógico, pierde sentido físico (se obtendrían frecuencias “recibidas”, f' , negativas) si el receptor se alejara del emisor con una velocidad mayor que la de la onda emitida ($v_s > u$), porque en ese caso dicho receptor nunca sería alcanzado por la onda.

$$f' = \frac{u - v_s}{u} f = \left(1 - \frac{v_s}{u}\right) f \quad (1)$$

Cuando la ecuación (1) sí es aplicable, sus consecuencias resultan coherentes con los dibujos de los *applets* y lo mostrado por la experiencia de la cubeta de ondas: Si el receptor se aleja del emisor ($v_s > 0$) se obtiene un desplazamiento hacia menor frecuencia ($f' < f$), mientras que si se acerca ($v_s < 0$), se obtiene un desplazamiento a mayor frecuencia ($f' > f$). Por ejemplo, en el caso de una onda sonora, el receptor recibe un sonido de tono más grave que el emitido en el primer supuesto y uno más agudo en el segundo. La ecuación (1) también prevé que, en la situación considerada, la magnitud del desplazamiento Doppler depende del valor del cociente entre la velocidad del receptor y la velocidad de la onda.

Ilustramos estos comentarios representando la relación entre las frecuencias emitida y recibida (f y f') en función de la velocidad del receptor (v_s) para el caso de una onda sonora (velocidad de propagación en el aire a temperatura ambiente $u = 343$ m/s) (figura 2).

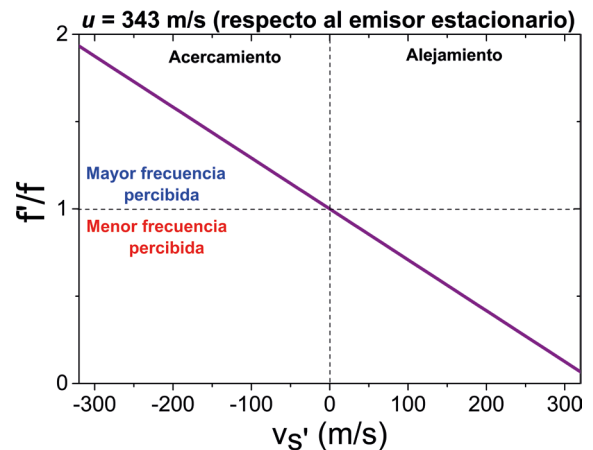


Fig. 2. Relación de frecuencias según el efecto Doppler no relativista a partir de la ecuación (1). El emisor se encuentra estacionario con respecto al medio ($v_s = 0$) y emite una onda sonora de velocidad $u = 343$ m/s respecto a este, y el receptor se mueve a cierta velocidad v_s con respecto a ambos.

Repasado el caso particular más sencillo, vamos a generalizarlo un poco, para considerar que el emisor también se mueva a cierta velocidad con respecto al medio (por ejemplo, cuando un vehículo de emergencia, viajando a velocidad v_s , pasa por nuestro lado con la sirena activada mientras nosotros caminamos con velocidad v_r en la misma dirección). Manteniendo el mismo criterio de signos ($v_s, v_r > 0$ cuando se desplazan en la dirección opuesta a la que se encuentra el otro y viceversa), se obtiene la ecuación (2).

$$f' = \frac{u - v_r}{u + v_s} f \quad (2)$$

Es instructivo analizarla, mediante la consideración de los siguientes casos límite:

1. Si el emisor se encuentra estacionario respecto al medio ($v_s = 0$), se recupera, lógicamente, la ecuación (1).
2. Si el receptor se encuentra estacionario respecto al medio ($v_r = 0$), se sigue obteniendo $f' < f$ en caso de alejamiento relativo entre ambos, y $f' > f$ en caso de acercamiento.

Como hemos hecho antes con la ecuación (1) también aquí representamos gráficamente el cociente de frecuencias f'/f , pero esta vez con respecto a la velocidad del emisor, v_s , y para un receptor estacionario respecto al medio (figura 3). Ahora, al encontrarse v_s en el denominador, ya no se observa la simetría en los valores de f'/f respecto a un mismo valor de velocidad, pero de distinto signo. Esta sí se observaría en este segundo supuesto si representásemos la longitud de onda o el periodo de la onda (al ser ambas magnitudes inversamente proporcionales a la frecuencia).

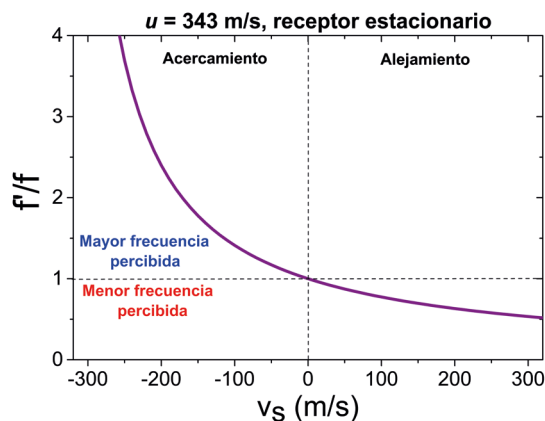


Fig. 3. Relación de frecuencias según la ecuación (2) para una onda sonora cuando el receptor se encuentra estacionario respecto al medio ($v_r = 0$).

Terminamos este breve repaso del efecto Doppler no relativista llamando la atención hacia el hecho de que este estudio se ha circunscrito a ondas mecánicas como el sonido. Alguien podría preguntarse si los desarrollos y los resultados mostrados se pueden generalizar a ondas electromagnéticas (se podría tener la tentación de realizar consideraciones similares sustituyendo el valor de u por el de la velocidad de la luz). La respuesta es negativa. Hacerlo sería totalmente incorrecto, como se puede atisbar, por ejemplo, recordando que la luz tiene la misma velocidad relativa respecto a cualquier observador, lo que no cuadra ni con los dibujos de los *applets*, ni con las expresiones algebraicas anteriores. Esto es así, porque tanto esos dibujos animados como las expresiones hasta ahora mostradas se sustentan en la mecánica newtoniana.

Obsérvese que, aunque no se haya dicho expresamente, al evaluar las velocidades relativas entre emisor, onda y receptor, se ha estado asumiendo que la ley de composición de velocidades de Galileo es la correcta (por ejemplo, $u_s + u_r = u_m$, siendo u_i la velocidad del sonido respecto a los distintos SRI).

Por tanto, en el caso de ondas electromagnéticas como la luz, pero también para ondas mecánicas en situaciones tales como, por ejemplo, el caso de un receptor que se dirija hacia el emisor de la onda en sentido contrario a su propagación a altas velocidades, es necesario estudiar el efecto Doppler directamente en el marco de la relatividad especial. En el resto de este artículo mostraremos que los diagramas de Minkowski son muy valiosos para este estudio.

3. Construcción y manejo de diagramas de Minkowski

Un diagrama de Minkowski es un diagrama de ejes espacio-tiempo, adoptado con respecto a un cierto sistema de referencia inercial (SRI). que ha de resultar coherente con el cumplimiento de las leyes de la relatividad. Para ello, el eje de tiempos (que en estos diagramas suele ser el de abscisas) se etiqueta como $c \cdot t$ (c es la velocidad de la luz), con lo que las dos magnitudes espacio-temporales se expresan en unidades de longitud y la representación de la propia luz en el diagrama se plasma mediante líneas rectas de pendiente igual $+45^\circ$ o -45° . En la figura 4 se muestra en un diagrama bidimensional ($x, c \cdot t$) el avance sobre la dirección X de un SRI, S ($x, y, z, c \cdot t$) de los extremos (H_1 y H_2) de un haz esférico de luz emitido desde el origen de coordenadas en el instante $t = 0$. Las dos líneas, H_1 y H_2 , delimitan lo que se denomina "cono de luz" por su interpretación geométrica en un diagrama que considere dos de las tres dimensiones espaciales. Como ninguna entidad material puede alcanzar la velocidad, c , la representación de cualquier movimiento, que no sea el de la propia luz y que también se inicie en el origen de coordenadas para $t = 0$, se plasma en el diagrama mediante una línea que no puede salir del cono de luz, y cuya pendiente (definida por el ángulo θ) ha de ser mayor de 45° en todos los puntos.

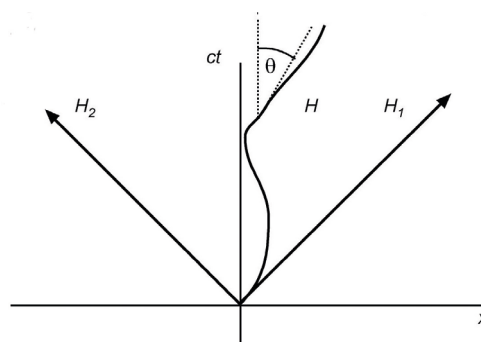


Fig. 4. Representación en un diagrama simple de Minkowski del "cono de luz" (H_1H_2) y de un movimiento cualquiera (H) que se inicia para $t = 0$ en la posición $x = 0$ (como lo hace también la luz representada).

Los diagramas simples, como el de la figura 4, muestran la representación abstracta de sucesos y de movimientos (más en general, de procesos físicos) con respecto a un determinado SRI S ($x, y, z, c \cdot t$). Sin embargo, la mayoría de implicaciones de cinemática relativista que se quieren estudiar involucran a magnitudes en varios SRI diferentes. Por eso, en lugar de usar un diagrama distinto para cada SRI al que se quieren referir tales magnitudes, se usan diagramas en

los que se pueden representar conjuntamente los puntos de vista de diversos SRI.

Para construir un diagrama de Minkowski doble (figura 5) se empieza dibujando ejes ortogonales espacio-tiempo ($x, c \cdot t$) para dar el punto de vista de un primer SRI, S, al que definimos como "sistema en reposo". El (no) movimiento de su origen, O, se representa respecto de esos ejes mediante una línea vertical encima del eje de tiempos ($c \cdot t$), la cual se llama línea de universo del observador O. Este hecho da la clave para incorporar en el mismo dibujo ejes espacio-tiempo ($x', c \cdot t'$) correspondientes al punto de vista de un segundo SRI, S', que se desplace por el eje X con una velocidad v respecto de S (asumiendo que los orígenes espaciales de los dos SRI, O y O', coinciden para $t = t' = 0$). El cambio de posición respecto al origen común del origen del segundo SRI, S' (línea de universo del segundo observador, O'), se representa con respecto a S mediante una línea, cuya pendiente respecto al eje $c \cdot t$ es igual a v/c . Por tanto, esa misma inclinación ha de tener el eje de posiciones (x') del SRI, S' con respecto al eje x , para que una línea de luz emitida en el origen común a ambos SRI en $t = t' = 0$, sea bisectriz de los ejes espacio-temporales de los dos SRI, cumpliéndose así una consecuencia directa de los postulados de la relatividad: la luz tiene la misma velocidad c respecto de ambos SRI, es decir, $\Delta x/\Delta t = \Delta x'/\Delta t' = c$.

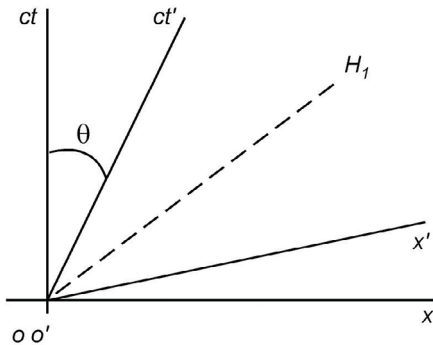


Fig. 5. Diagrama doble para mostrar el punto de vista de dos SRI S ($x, c \cdot t$) y S' ($x', c \cdot t'$). La inclinación del eje $c \cdot t'$ cumple que $\tan \theta = v/c$ (v es la velocidad de S' respecto de S) La línea de luz emitida en $t = t' = 0$ desde el origen de ambos SRI es la bisectriz en ambos diagramas.

Para obtener resultados cuantitativos del diagrama doble de Minkowski es preciso calibrarlo, y ello se hace a partir del hecho fundamental de que el cuadrado del módulo del cuadrivector espacio-tiempo, s^2 , es invariante: se escribe igual en cualquier SRI y tiene el mismo valor en todos ellos. Considerando solo una dimensión espacial $s^2 = (c \cdot t)^2 - x^2$. De modo que, para calibrar los ejes de tiempo del diagrama doble se empieza haciendo $s^2 = 1$, lo que da lugar a la hipérbola $1 = (c \cdot t)^2 - x^2$. Debido a la invariancia de s^2 , dicha hipérbola corta al eje de tiempos de todos los SRI donde el tiempo es (en unidades de longitud) igual a 1. Similarmente se inicia el calibrado de los ejes de posición. En este caso se hace $s^2 = -1$, lo que da la hipérbola $1 = x^2 - (c \cdot t)^2$, que corta a los dos ejes de posición donde la longitud es igual a 1. Iniciado así el proceso de calibrado de los diagramas (figura 6), se pueden ir añadiendo sucesivas curvas de calibración para los ejes de tiempo (haciendo $s^2 = 4$ se obtiene la curva a los ejes de tiempo donde el tiempo es igual a 2, para $s^2 = 9$ se obtiene la siguiente curva que corta dichos ejes de tiempo donde este es igual a 3, etc.) y, similarmente, para los de posición.

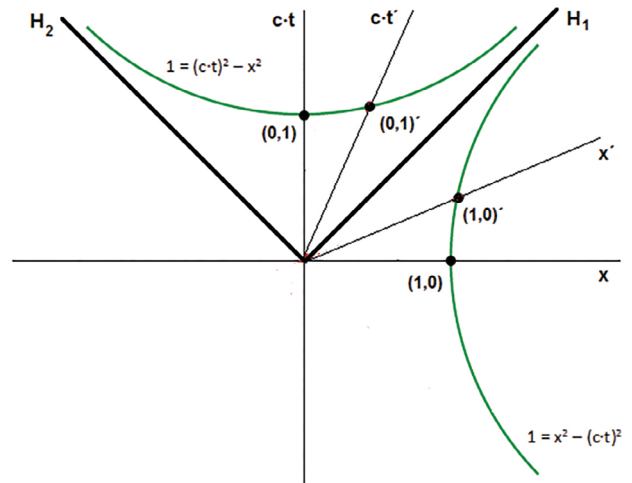


Fig. 6. Calibración de un diagrama doble de Minkowski.

4. La "dilatación de tiempos" con diagramas de Minkowski

Los diagramas espacio-tiempo de Minkowski se vienen usando con profusión creciente para mostrar aspectos variados de la cinemática relativista [5]. Uno de ellos, que va a ser esencial para la comprensión del efecto Doppler relativista, es la llamada "dilatación de tiempos". En la figura 7 se representa un diagrama doble en el que esta se pone en evidencia. Un observador en reposo registra en su SRI S ($x, c \cdot t$) dos sucesos OA separados por una duración temporal T a lo largo de su línea de universo. Otro observador, que se mueve con una cierta velocidad, v , con respecto al anterior registra dos sucesos OA' en su SRI S' ($x', c \cdot t'$), separados por otra duración temporal T' en su línea de universo. Para el observador en reposo, A y A' son simultáneos (ambos transcurren en un tiempo T).

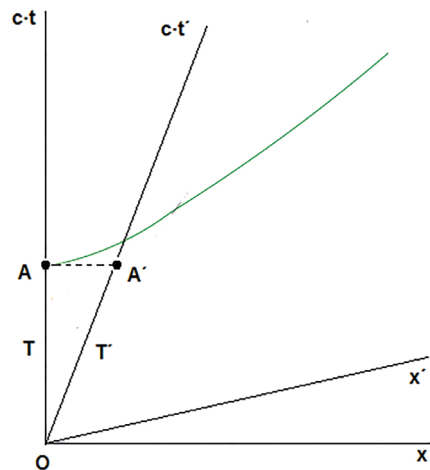


Fig. 7. Diagrama doble que muestra la "dilatación temporal" ($T < T'$).

Como vemos (obsérvese donde corta la curva de calibración al eje de tiempos de cada SRI), el diagrama muestra directamente que $T > T'$, desigualdad que expresa en términos cualitativos la "dilatación de tiempos". Cuantitativamente:

$$T = \gamma T' \tag{3}$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Aunque las duraciones que se comparan (T y T') son valores de dos tiempos propios (por tanto, valores absolutos) que solo pueden ser medidos directamente dos observadores distintos (O puede medir T , O' puede medir T'), la desigualdad entre ellos se denomina de "dilatación de tiempos", porque, conociendo la ley, el observador en reposo podría atribuir a un proceso tal como, por ejemplo, un movimiento que comience en O y termine en A' , la duración T (una vez sabe que, para él, A y A' son simultáneos), y esta duración es mayor que la duración propia, T' , de ese mismo proceso.

A modo de ejemplo cuantitativo de esto podemos suponer que S' se mueve respecto de S a dos quintas partes de la velocidad de la luz ($v = 0,4c$), y obtener con exactitud las coordenadas del eje de tiempos de S' ($c \cdot t'$) con respecto al eje de tiempo de S ($c \cdot t$) usando las transformaciones de Lorentz (expresiones 4a y 4b):

$$ct = \gamma ct' \tag{4a}$$

$$x = \beta \gamma ct' \tag{4b}$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ y $\beta = \frac{v}{c}$. En este caso $\gamma = 1,09$ y $\beta = 0,4$.

De forma similar podemos obtener las coordenadas del eje x' , así, una vez representados ambos ejes más la línea de luz en el diagrama anterior, este puede quedar como muestra la figura 8.

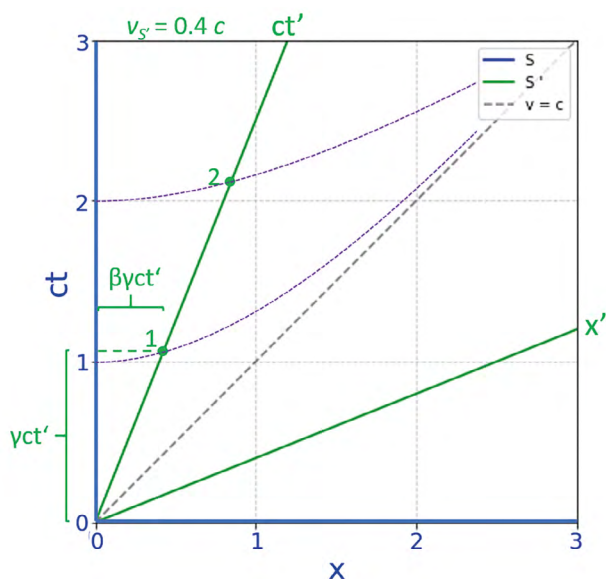


Fig. 8. Diagrama de Minkowski para la comprobación cuantitativa de la "dilatación temporal" en un caso concreto (siendo $v = 0.4c$).

5. Efecto Doppler relativista

Ya tenemos las herramientas necesarias para tratar el efecto Doppler relativista apoyándonos en los diagramas espacio-tiempo de Minkowski. Con las debidas precauciones (entre ellas, ser bien conscientes de que considerar a la Tierra como un SRI, estrictamente, no se ciñe a la realidad) vamos a plantear, a modo de ejemplo, la siguiente situación: Una nave abandona la Tierra a una velocidad constante considerable y, mientras lo hace, envía a nuestro planeta una señal electromagnética. Adoptaremos el punto de vista de dicho emisor (la nave), es decir, consideraremos un SRI, S , ligado a ella, en

reposo, y otro SRI, S' , ligado a la Tierra, que se aleja de S en sentido positivo del eje X con velocidad v_s . Consideraremos también que S y S' tienen un origen espacio-temporal común ($x = x' = 0$ en $t = t' = 0$) (figura 9).

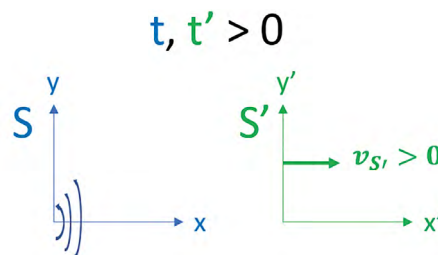


Fig. 9. Planteamiento del problema adoptando el punto de vista del emisor.

La figura 10 muestra un diagrama doble de Minkowski correspondiente a este planteamiento. En él se representan de color azul los ejes espacio-tiempo del SRI, S , ligado a la nave, en reposo, y de color verde los del SRI, S' , ligado a la Tierra. Se asume que la onda emitida tiene un periodo $\tau = 1/c$ (para el emisor) y que, en consecuencia, los frentes de onda salen de la nave en tiempos propios (para S) $t = n \cdot \tau$ ($n = 1, 2, \dots$). Como esos frentes de onda viajan a $v=c$, sus movimientos se representan mediante líneas inclinadas 45° (de color amarillo) que dejan el SRI S (la nave) en los instantes $c \cdot t = 1, 2, \dots$ y llegan al SRI S' (la Tierra) con un cierto periodo τ' .

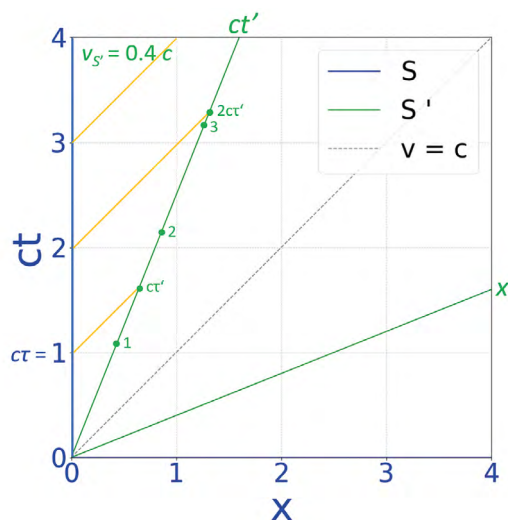


Fig. 10. Diagrama doble de Minkowski que muestra la emisión de luz desde S (nave) hacia S' (Tierra).

El diagrama muestra directamente (basta con fijarse en la graduación de los ejes de tiempo de ambos SRI) que τ' es mayor que τ y, por tanto, $f' < f$, es decir, que se tiene un desplazamiento hacia menor frecuencia en la onda recibida respecto a la emitida (denominado "hacia el rojo" al tratarse de una onda electromagnética). El diagrama también enseña que esta diferencia entre la frecuencia emitida y la recibida es mayor cuanto mayor sea la velocidad relativa entre ambos SRI (es decir, cuanto mayor sea la inclinación del eje $c \cdot t'$ respecto al eje $c \cdot t$). Este resultado concuerda cualitativamente con el antes visto del efecto Doppler no relativista pero no lo hace cuantitativamente, como ahora vamos a comprobar.

Busquemos, para empezar, la relación entre los distintos parámetros de interés desde el punto de vista del emisor

(SRI S): la posición x_1 en la que se encuentra la Tierra, S', cuando llega el primer frente de onda, el periodo de la onda emitida, τ y el tiempo, t_1 , que tarda el primer frente de ondas en llegar la Tierra. Como el ángulo de la línea de luz en el diagrama de Minkowski es de 45° , esta relación viene dada por la expresión (5):

$$ct_1 = c\tau + x_1 \tag{5}$$

Es instructivo analizar dicha expresión para observar que parece describir algo análogo al efecto Doppler no relativista pues indica que, respecto al origen de coordenadas y tiempos (donde ocurriría el "frente de ondas 0"), el primer frente de ondas ha tardado un tiempo t_1 en llegar a S', que es la suma del periodo de dicho frente de ondas (para el emisor) y el tiempo que ha tardado dicho frente en llegar a S' (x_1/c). Obsérvese que podemos hacer esta analogía porque ¡OJO!, la expresión (5) solo es válida medida por los relojes del sistema de referencia S (la nave)! Esto es crucial que se entienda y queda bastante claro si nos fijamos, de nuevo, en el diagrama de Minkowski de la figura 11, ya que el mismo pone en evidencia que las relaciones usadas hasta este momento son válidas únicamente con respecto a los ejes espacio-tiempo del SRI S (de color azul en dicho diagrama).

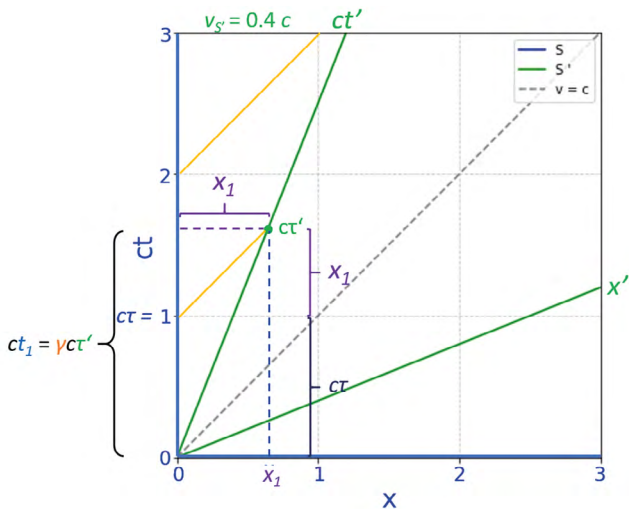


Fig. 11. Diagrama doble de Minkowski para la emisión de luz desde S (nave) hacia S' (Tierra), proyección hacia $(x, c \cdot t)$ y, a la izquierda, expresión de la dilatación temporal entre S y S'.

De hecho, podríamos dar un paso más en estas deliberaciones y deducir el desplazamiento Doppler no relativista a partir de la expresión (5). Para ello, usaríamos el concepto de que el tiempo es absoluto en la mecánica newtoniana. Entonces, sería: $t_1 = \tau'$ (pues, para S', el periodo sería la diferencia temporal entre el frente 0, que se encuentra en ambos sistemas en el origen de tiempos, y este primer frente que le llega), y también $x_1 = v_s t_1 = v_s \tau'$, con lo que la expresión (5) se podría reescribir así: $c\tau' = c\tau + v_s \tau' \rightarrow \tau' = \frac{c}{c - v_s} \tau \rightarrow f' = \frac{c - v_s}{c} f$, obteniendo, como vemos, una expresión equivalente a la ecuación (1), que se obtenía en el mencionado efecto Doppler no relativista para el caso de una onda mecánica emitida por un cuerpo en reposo.

Hechas estas disquisiciones pasamos a resolver operativamente el caso relativista que nos ocupa: Combinando las transformaciones de Lorentz (4a y 4b) obtenemos la expresión (6):

$$ct_1 = \frac{1}{\beta} x_1 \tag{6}$$

Dividiendo dicha expresión (6) entre c se observa que esta indica la posición de S' respecto a S en el momento en el que recibe la onda: $x_1 = v_s \cdot t_1$. Pero, ¡ojo de nuevo!, como muestran todos los diagramas anteriores, ese valor de t_1 , NO es equivalente al tiempo medido en los relojes de S' que les indica el periodo de la onda, τ' . Según hemos desarrollado en la sección 4 [ecuación (3)], y queda también evidente en el diagrama de Minkowski (figura 10), el tiempo transcurrido desde el origen común de tiempos hasta que el primer frente de ondas llega a S' es mayor para los relojes en S (nave) respecto a los relojes en S' (Tierra) (expresión 7):

$$t_1 = \gamma \tau' \tag{7}$$

Introduciendo, finalmente, (6) y (7) en (5), llegamos a la expresión (8):

$$ct_1 = c\tau + ct_1 \beta$$

$$\gamma \tau' = \tau + \gamma \tau' \beta$$

$$\tau' = \frac{\tau}{\gamma(1-\beta)} = \frac{\tau \sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}$$

$$\frac{1}{f'} = \tau' = \tau \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{8}$$

La cual refleja el desplazamiento Doppler relativista para un receptor que se aleja del emisor (estacionario) con velocidad $v_s = \beta c$. En el desarrollo utilizado para obtenerla hemos resaltado en color naranja el efecto del factor γ . Como la onda electromagnética se desplaza con el mismo valor de velocidad respecto a ambos observadores, este resultado es igualmente válido para cualquier SRI desde el cual un emisor y un receptor se alejen entre sí longitudinalmente (es decir, en una línea que une a ambos); tan solo debemos definir $\beta = v_{rel}/c$, siendo v_{rel} la velocidad relativa entre emisor y receptor.

No nos detendremos en ello pero se puede demostrar que, para un receptor que se acerque al emisor, la expresión (8) sigue siendo válida si adoptamos el signo de la velocidad entre ambos, v_{rel} (y por tanto de β) como negativo en lugar de como positivo. Sin embargo, para visualizar los resultados en un único diagrama de Minkowski nos conviene fijar el valor de v siempre como positivo, para lo cual basta con reescribir la expresión (8) y desglosarla en las expresiones (9).

$$f' = \begin{cases} f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} & \text{alejamiento} \\ f \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} & \text{alejamiento} \end{cases} \tag{9}$$

donde $\beta = \frac{v_{rel}}{c} > 0$ independientemente del sentido de la velocidad relativa.

Para tratar en un único diagrama de Minkowski tanto el acercamiento relativo entre ambos cuerpos como el alejamiento relativo entre ellos, se ha de extender el diagrama

de la figura 11 al espacio-tiempo negativo respecto al origen espacio-temporal común de ambos SRI. El SRI en reposo (S) se mantiene en el emisor. Hecho esto, aquello referente al alejamiento relativo permanece en el cuadrante de espacio-tiempo positivo (cuadrante 2) y lo referente al acercamiento relativo queda en el cuadrante 3. Esta visualización, cuyo desarrollo para el tercer cuadrante queda como ejercicio para el lector curioso, se muestra en la figura 12.

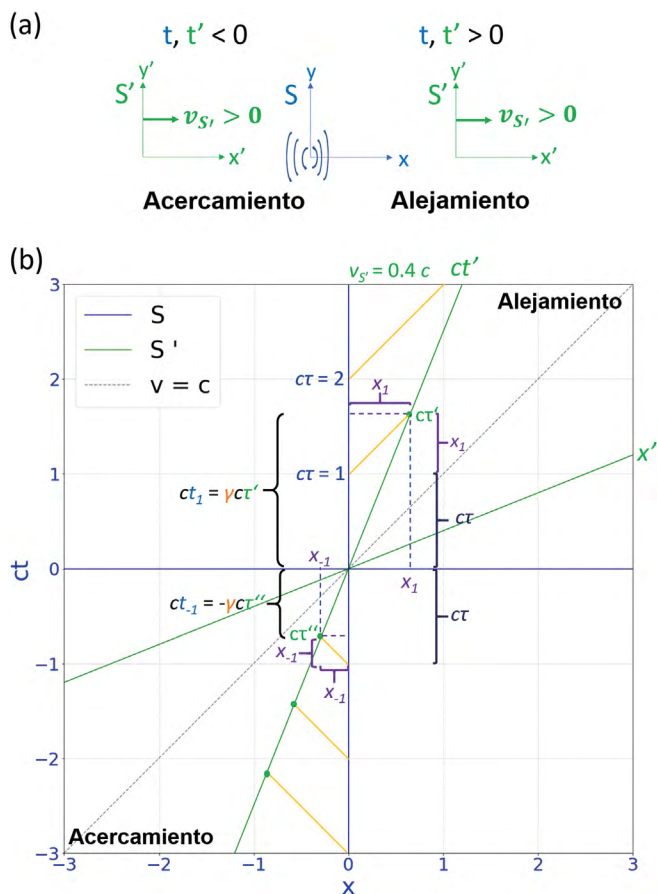


Fig. 12. Extensión del efecto Doppler relativista al acercamiento entre ambos SRI. **(a)** Criterio de signos utilizado. Nótese como la velocidad relativa siempre es positiva y es el tiempo el que determina si hay acercamiento o alejamiento, pues, en el origen de tiempos común, ambos SRI se encuentran en $x = x' = 0$. **(b)** Diagrama doble de Minkowski similar al de la figura anterior, pero extendido hacia los ejes negativos. Físicamente, los ejes negativos representan la emisión de luz de la nave (sistema S, “en reposo”) hacia la Tierra (sistema S’) cuando se produce el acercamiento entre ambas, mientras que los ejes positivos corresponden al alejamiento relativo entre ambas. La proyección a valores espacio-temporales negativos es necesaria para poder representar ambos casos en un mismo diagrama de Minkowski con un origen común espacio-temporal para ambos SRI.

Comparemos ahora el novedoso cuadrante 3 con respecto al anteriormente desarrollado cuadrante 2. Se pueden hacer las siguientes consideraciones:

1. En el cuadrante 3 los frentes de luz se representan viajando hacia valores negativos de x , donde se encuentra el receptor.
2. En el diagrama hemos definido al periodo de la onda medido por el receptor durante el acercamiento como τ'' . Debido a que el receptor (SRI S’) se va acercando según avanzamos en el tiempo (hacia “tiempos menos negativos”, según nuestro origen de coordenadas), este recibe los frentes de onda más “apretados” (menor τ'') con respecto, tanto al periodo de la onda emitida según

el SRI S (τ), como, en mayor medida, al periodo medido por S’ durante el alejamiento (τ').

3. También aquí el resultado coincide cualitativamente con el del efecto Doppler no relativista, teniendo en este segundo caso (acercamiento relativo) una frecuencia recibida mayor y en el anterior una frecuencia recibida menor. Sin embargo, ambos periodos medidos por el receptor (τ' y τ'') son cuantitativamente inferiores a lo predicho por la mecánica newtoniana por un factor γ (es esclarecedor observar en la figura 12 que dicho factor γ aparece en la misma posición independientemente del acercamiento o alejamiento relativo entre ambos SRI).

Llegados a este punto pasamos a representar de nuevo en la figura 13 (a) el cociente de frecuencias f'/f , con objeto de visualizar este último punto, mostrando el desplazamiento de frecuencia por efecto Doppler en el contexto de la mecánica newtoniana y en el de la relatividad especial, tanto para el acercamiento como para el alejamiento relativo entre emisor y receptor (como hasta ahora, situando nuestro SR en reposo en el emisor). Nótese que una representación no relativista (curva discontinua de color violeta), que podría hacerse suponiendo que la onda emitida se desplace a $v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s únicamente respecto al emisor, sería análoga a la de la figura 2. Por supuesto, es una representación errónea del problema, que ignora los conceptos fundamentales de la relatividad especial.

Si ahora colocamos el SRI en reposo en el receptor, la curva del efecto Doppler relativista (figura 13 (b)) es exactamente la misma que aquella de la figura 13 (a). Por otro lado, como vimos en la ecuación (2) y en la figura 3, la curva no relativista sí es distinta según se mueva el emisor o el receptor de la onda. Conviene no olvidar que en el fondo de estos resultados subyacen las transformaciones de Galileo en el caso no relativista y las de Lorentz en el relativista.

Por otra parte, al haber considerado ahora todo el rango de velocidades posible entre emisor y receptor (pues ningún ente material puede alcanzar o superar la velocidad de la luz), la representación muestra que, para que la diferencia entre los resultados predichos por ambas teorías sea cuantitativamente apreciable, el módulo de dicha velocidad relativa ha de ser superior a una décima parte de la velocidad de la luz. La tabla I muestra los valores numéricos obtenidos para el caso de la figura 13 (a).

Tabla I. Comparativa del cociente de frecuencias emitida y recibida según el cálculo no relativista y el cálculo relativista en función de la velocidad del receptor (v_s) cuando el emisor se encuentra en reposo, es decir, en el caso equivalente a lo representado en la figura 13(a)

v_s	f'/f (no relativista)	f'/f (relatividad)
0,1c	0,9	0,905
0,2c	0,8	0,816
0,3c	0,7	0,734
0,4c	0,6	0,655
0,5c	0,5	0,577
0,6c	0,4	0,5
0,7c	0,3	0,420
0,8c	0,2	0,333
0,9c	0,1	0,229

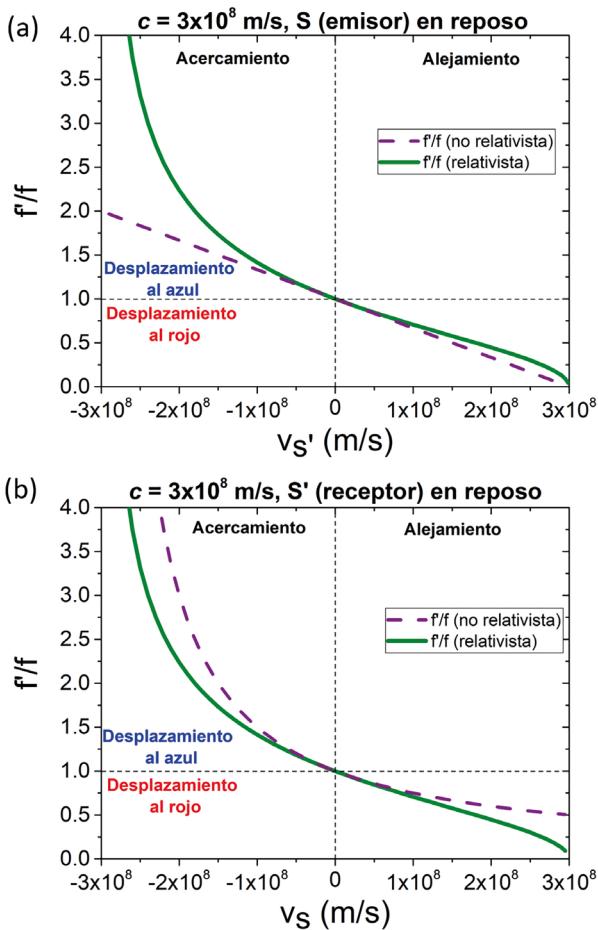


Fig. 13. Relación de frecuencias según el efecto Doppler no relativista (curva discontinua de color violeta) y relativista (curva de color verde). **(a)** El sistema de referencia se encuentra en el emisor, es decir, se asume que el emisor está en reposo y el receptor (S') se mueve con respecto a este (como en los diagramas de Minkowski representados). **(b)** Análoga representación, pero con el SR en reposo en el receptor. Nótese que el segundo caso es directamente transferible a las señales electromagnéticas medidas desde la Tierra que provienen de estrellas y galaxias lejanas.

En esta comparación, evidentemente, los resultados relativistas son, para todo rango de velocidades los correctos, si bien la discrepancia entre ambos es mayor cuanto mayor sea la velocidad del receptor. El único valor en el que ambas expresiones coinciden exactamente es para $v_S = 0$, es decir, el caso en el que no se produzca efecto Doppler.

Vemos así que, para comprender completamente el efecto Doppler, es preciso estudiarlo en el marco de la teoría de la relatividad especial, no únicamente para el caso obvio en que las velocidades involucradas sean elevadas, sino para todo el rango de velocidades posibles. Fuera de este marco se obtiene una interpretación incompleta de, al menos, dos aspectos fundamentales:

- a) El hecho de que no existe ningún observador privilegiado con respecto a las ondas electromagnéticas; estas viajan siempre a $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Ello queda bien resaltado en los diagramas de Minkowski y por la circunstancia de que la ecuación del efecto Doppler relativista tiene la misma representación desde ambos SRI mientras que la no relativista es distinta según sea el emisor o el receptor el sistema en movimiento (respecto al medio en el que se propaga la onda).
- b) Aunque los desarrollos que se han expuesto en este artículo hasta ahora lo han sido únicamente acerca de un

efecto Doppler “longitudinal” (aquel en el que emisor y receptor se mueven en un único eje x), y también existe efecto Doppler en cualquier dirección con componente longitudinal no nula, fijémonos en los puntos en los que no hay componente longitudinal de velocidad entre emisor y receptor, pero sí una componente de velocidad perpendicular entre ambos. Ahí también se ha de producir un efecto Doppler; a diferencia de lo que nos indicaría nuestra intuición, basada en los diagramas de la figura 1 y la mecánica newtoniana.

Para estudiar operativamente dicho efecto Doppler transversal podemos adoptar, como en todos los desarrollos anteriores, el punto de vista del emisor (por ejemplo, la nave), y, por tanto, ubicar, ligado a dicho emisor, un SRI S en reposo. Nos hemos de fijar en qué ocurre en el momento exacto en el que ambos se encuentran en su mínima distancia relativa y el receptor (por ejemplo, la Tierra) se desplaza en un eje perpendicular a la línea de visión del emisor (figura 14).

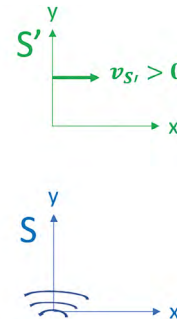


Fig. 14. Adoptado de los SRI para estudiar el efecto Doppler transversal. De nuevo, situamos al emisor (S) “en reposo” y al receptor en movimiento.

En esta situación, al igual que ocurría en la ecuación (7), los relojes del emisor (S) miden un periodo de la onda mayor que el periodo medido por el receptor (S'). Al no haber en ese instante ninguna otra causa que provoque alguna diferencia adicional del periodo de la onda, tenemos en consecuencia que se cumple la expresión (10):

$$f' = \gamma f = \frac{f}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10)$$

En la situación analizada, dicha contribución de la dilatación temporal propicia un desplazamiento hacia el azul. Nótese que en esta expresión el valor de $\beta = v_S/c$ está elevado al cuadrado. Tiene sentido, pues el efecto de la “dilatación temporal” es el mismo independientemente del signo de la velocidad, y será mayor cuanto mayor sea la velocidad transversal del receptor.

Finalmente, comentaremos que en 1907 Einstein propuso la detección de dicho efecto Doppler transversal en el laboratorio como “un nuevo examen del principio de la relatividad” [6], involucrando la observación en ángulo recto de los rayos anódicos emitidos por un tubo de descarga en movimiento. Aquellos intentos experimentales fueron infructuosos debido, entre otros motivos, a que pequeñas desviaciones angulares del ángulo de observación respecto al haz daban lugar a cambios de frecuencia por efecto Doppler longitudinal del orden o superiores al efecto esperado. En 1938, Ives y Stilwell lograron la primera detección del mismo, si bien fue a partir de un sistema experimental más complejo, que involucraba

la observación de la onda emitida y su reflexión [7]. Eventualmente, con el desarrollo de los aceleradores de partículas, se pudo verificar el efecto Doppler transversal de forma directa [8], en los términos que había planteado el propio Einstein.

6. Conclusiones

Al estudiar el efecto Doppler para ondas electromagnéticas en el marco de la relatividad especial se contribuye a superar algunos prejuicios que se pueden arrastrar del estudio más habitual de dicho efecto en el marco de la mecánica no relativista. Concretamente: 1) Se pone en evidencia la necesidad de evaluar el orden de magnitud de las velocidades involucradas antes de aplicar de manera inconsciente la composición de velocidades de Galileo y con ello las expresiones no relativistas del efecto Doppler. 2) Se cuestiona una supuesta simetría, observada en efecto Doppler no relativista, entre un observador acercándose a la fuente y otro alejándose de esta con la misma velocidad. 3) Sale a la luz la existencia del “efecto Doppler transversal”.

Los diagramas espacio-tiempo de Minkowski son una herramienta accesible y potente para dicho estudio del efecto Doppler en el marco relativista que puede ayudar a mostrar con mayor claridad los hechos físicos involucrados, ofreciendo una perspectiva visualmente intuitiva y a la vez profunda de los mismos.

Este tratamiento del efecto Doppler enriquecido con los diagramas de Minkowski también resulta útil para reflexionar y comprender de manera más profunda el concepto de la “dilatación temporal”, con un ejemplo paradigmático y, al mismo tiempo, poco difundido del mismo.

Efecto Doppler de globos luminosos y supernovas de juguete

Eduardo Díaz-Miguel Bermúdez
IES “Salvador Rueda”, Dpto. de Matemáticas, Málaga



Se analiza el desplazamiento Doppler de una esfera de radio variable cuya superficie emite radiación electromagnética. A modo de aplicación, y con el objetivo de simular el efecto Doppler en supernovas, situamos mentalmente una de estas esferas en el universo en expansión. Para ilustrar el significado de los desplazamientos cosmológicos, z_{cosm} , y observados, z_{obs} , de las longitudes de onda que surgen en el estudio se averigua cuál sería el flujo de luz que un observador esperaría encontrar si en la expresión que proporciona dicho flujo utilizara z_{obs} en lugar del valor correcto, z_{cosm} .

Agradecimientos

Manuel Alonso Orts quiere agradecer al profesor Martin Eickhoff por haberle mostrado la posibilidad de usar los diagramas de Minkowski para representar el efecto Doppler.

Referencias

- [1] C. DOPPLER, Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_coloured_light_of_the_binary_stars_and_some_other_stars_of_the_heavens (1842).
- [2] Efecto Doppler, en la página web de “Materiales Didácticos de Física” de la Sección Local de Alicante de la RSEF (<http://rsefalicante.umh.es/TemasOndas/Ondas13.htm>).
- [3] C. NEIPP, A. HERNÁNDEZ, RODES-ROCA, A. MARQUEZ, T. BELÉNDEZ, A. BELÉNDEZ, An analysis of the classical Doppler effect, *European Journal of Physics* **24** (5), 497 (2003).
- [4] C. H. WÖRNER, R. ROJAS, Efecto Doppler con una fuente que acelera: una simple aproximación gráfica, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **38** (4), e4310 (2016).
- [5] J. TOMÉ, Problemas de Relatividad Especial: el potencial didáctico del Universo de procesos y del Sistema de referencia de simetría, *Revista Española de Física* **38** (2), 23 (2024).
- [6] A. EINSTEIN, Über die Möglichkeit einer neuen Prüfung des Relativitätsprinzips, *Annalen der Physik* **328** (6), 197 (1907).
- [7] E. IVES, HERBERT y G. R. STILWELL, An experimental study of the rate of a moving atomic clock, *Journal of the Optical Society of America* **28** (7), 215 (1938).
- [8] D. HASSELKAMP, E. MONDRY, A. SCHARMANN, Direct observation of the transversal Doppler-shift, *Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei* **289** (2), 151 (1979).

1. Introducción

En un trabajo anterior [1] estudiamos una generalización del efecto Doppler de fuentes puntuales a focos extensos. Se consideraba, en particular, el caso de una esfera móvil de radio variable tal que todos los puntos de su superficie emiten, de forma coherente, radiación electromagnética de una cierta frecuencia. Como aplicación, en este artículo analizamos el desplazamiento relativo de longitudes de onda de estas esferas de luz, que son asimiladas con posterioridad a “supernovas”.

2. Efecto Doppler de un globo luminoso cuyo radio es variable

En la figura 1, la trayectoria Γ es la que describe el centro, C , de una esfera cuyo radio en el instante de emisión es $R(t_e)$, en donde t_e es el tiempo en el que todos los puntos de la superficie $\Sigma(t_e)$ emiten simultáneamente frentes de luz esféricos. Según el principio de Huygens, la envolvente de dichos frentes elementales es la superficie que llega al observador O en el instante de observación, t_o . La velocidad del centro es $\vec{v}_c = \dot{\vec{x}}_c$ y el vector de posición unitario de O respecto a C viene dado por

$$\vec{n}(t_e) = (\vec{x}_o - \vec{x}_c(t_e)) / |\vec{x}_o - \vec{x}_c(t_e)|,$$

siendo \vec{x}_o y \vec{x}_c sus vectores de posición respectivos. Sea λ_e la longitud de onda de la luz emitida por los puntos de la superficie de la esfera en el instante t_e y $f_e = c / \lambda_e$ su frecuencia.