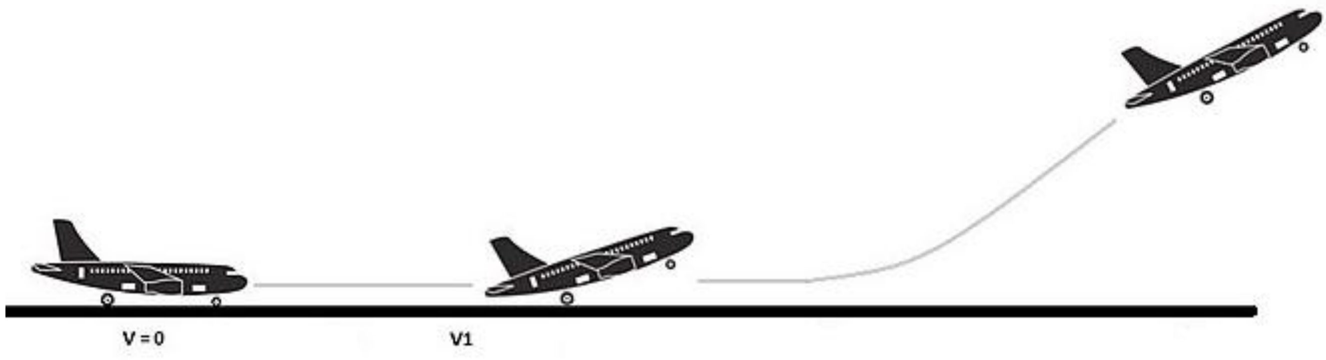
**En la pista de despegue los aviones aceleran hasta alcanzar una determinada velocidad, $v_1$. A esa velocidad realizan maniobras que provocan que se levante el morro del avión. Entonces la fuerza de sustentación ejercida por el aire supera al peso y el avión despega. ¿Qué longitud mínima ha de tener la pista de despegue de un aeropuerto? (Datos: velocidad $v_1$ = 80m/s; masa del avión (lleno) = 70 toneladas; fuerza motriz = 250000N; coeficiente de rodadura = 0.05; valor medio de la fuerza de resistencia del aire durante la carrera de despegue = 30000N)**

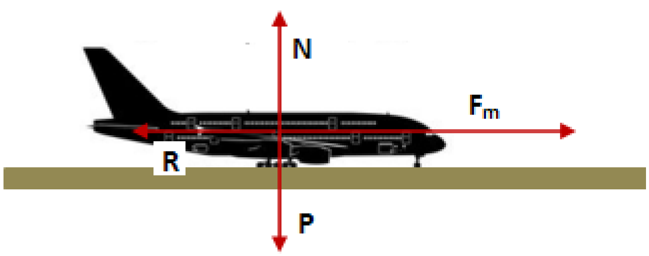



***Planteamiento***

Como se explica en el enunciado, cuando el avión alcanza la velocidad $v_1$, orienta unas partes móviles, llamadas elevadores o timones de profundidad, y esto provoca que se levante el morro. Actúa entonces lo que en el argot de la aviación se denomina el "factor aire", ya que es el aire que rodea al avión el que, mediante efectos aerodinámicos sobre el ala, el fuselaje y el resto de las partes y de las superficies de control del avión, ejerce la fuerza de sustentación. En esa postura y a esa velocidad dicha fuerza de sustentación supera al peso y el avión inicia el vuelo.

El estudio físico de estos movimientos es bastante complejo, porque durante la carrera por la pista y, sobre todo, en la fase final del proceso (desde que se alcanza la velocidad $v_1$, hasta que se produce la elevación), influyen numerosos factores, que pueden depender de las condiciones atmosféricas (viento, densidad del aire, humedad, etc.), de las condiciones de la pista (rugosidad, pista seca o mojada, etc.), y del propio avión (masa, forma, etc.)

Conviene, por tanto, simplificar el problema, lo que haremos, en primer lugar, buscando obtener, únicamente, la distancia D, que recorre el avión desde que empieza a moverse, hasta que alcanza la velocidad $v_1$. Esta distancia será inferior a la longitud que deba tener la pista de despegue, ya que, para obtener ésta cuando menos, habrá que añadir la distancia que recorre el avión mientras efectúa las últimas maniobras de despegue y, también, una distancia adicional de seguridad.




Durante el proceso al que hemos delimitado el problema, es decir, mientras el avión acelera por la pista, se ejercen sobre él las siguientes fuerzas:

**$F_m$**: fuerza motriz, generada por las turbinas del motor.

**P**: Peso del avión, incluida toda su carga (personas, equipajes, combustible,..)

**N**: Reacción normal, que ejerce el suelo sobre las ruedas.

**R:** Fuerzas de resistencia, es decir, la suma de la fuerza de rozamiento por rodadura, $\mathbf{F_r} = \rho\cdot\mathbf{R}$, y la fuerza de oposición del aire, $\mathbf{F_a}$.

Entre todas estas fuerzas, una de ellas, la fuerza de oposición ejercida por el aire, $\mathbf{F_a}$, es bastante difícil de calcular, porque su magnitud depende de factores tales como el perfil del avión (su forma, el área de la superficie transversal que va penetrando a través del aire), las propiedades del aire (su densidad, grado de humedad,..), y también (y mucho) de la velocidad que va alcanzando el propio avión mientras acelera por la pista (el modelo más ajustado a la realidad es plantear que el módulo de dicha fuerza sea proporcional al cuadrado de la rapidez). Con objeto de que se pueda hacer un desarrollo matemático simple del problema (dirigido a alumnos de Secundaria) en el enunciado se aporta un valor medio (constante) de esta fuerza, a pesar de que lo cierto es que ella varía de forma muy importante al variar la velocidad del avión. Hay que aclarar que este valor constante correspondería a una fuerza hipotética (no real) de módulo constante (para una carrera de aceleración del avión determinada) y cuyo efecto sobre el movimiento fuera ralentizarlo en la misma magnitud en la que lo hace la auténtica fuerza de oposición del aire (variable).

Por otra parte, vemos que en este caso el módulo del peso, P, y el módulo de la reacción normal, R, son iguales, lo que implica que la fuerza resultante $\mathbf{F_{res}}$, sea tangente a la trayectoria del avión (que supondremos rectilínea) y se oriente en el sentido de su movimiento.

Expuestas todas estas condiciones simplificadoras, pasamos a plantear hipótesis acerca de las variables de las que puede depender la magnitud buscada, D.

***Hipótesis***

Es lógico suponer que la distancia recorrida por el avión dependa de la velocidad $v_1$ que se quiere alcanzar, del módulo de la fuerza motriz, $F_m$, de la masa del avión, m y de los factores que determinan las fuerzas de resistencia, como el coeficiente de rozamiento por rodadura, ρ, la gravedad, g, y el módulo de la que hemos denominado “fuerza media de rozamiento” ejercida por el aire, $F_a$.

$$D = f\,(v_1, m, F_m, \rho, g, F_a)$$

Más precisamente (a igualdad de los restantes factores), planteamos que:

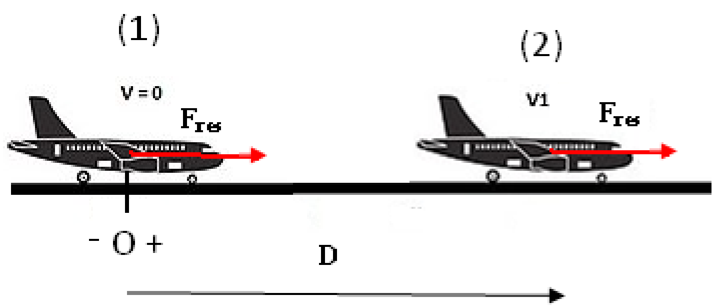
- Cuanto mayor sea la velocidad $v_1$ que deba alcanzar el avión en la carrera de despegue, mayor será la distancia, D, que deba recorrer para alcanzar dicha velocidad.
- Cuanto mayor sea la fuerza motriz aplicada, lógicamente menor será D, ya que será mayor la aceleración obtenida.
- En cuanto a la influencia de masa, podemos pensar, por una parte, que, cuanto mayor sea m, también deberá ser mayor D, porque una masa mayor significa una mayor inercia del avión y, por tanto, una menor aceleración. Ahora bien, también hemos de tener en cuenta que una masa mayor supone un peso mayor del avión y ello implica que la fuerza de rozamiento por rodadura aumente. Entonces, cuanto mayor sea m, D debería ser menor. Dejamos, de momento, pendiente la cuestión de dilucidar si predomina la influencia de una u otra masa o si ambas se compensan.
- Una de las hipótesis que acabamos de plantear sobre la influencia de la masa, nos remite a la fuerza de rozamiento por rodadura. Puesto que dicha fuerza se opone al movimiento del avión sobre la pista, tanto si aumenta el coeficiente de rodadura, ρ, como si lo hace la aceleración de la gravedad, g, deberá disminuir D.
- Finalmente, el viento también se opone al movimiento del avión y, por tanto, cuanto mayor sea $F_a$, mayor deberá ser D.

También podemos plantear algunos casos límite. Por ejemplo, si el avión pudiera despegar sin necesidad de alcanzar ninguna velocidad (como, por ejemplo, le ocurre a un helicóptero), es decir, si $v_1=0$, entonces será también D=0. Si cualquiera de los factores que se oponen al movimiento del avión ($\rho$, g, $F_a$) tendiera a infinito, entonces también D $\rightarrow\infty$. Etc.

***Estrategias de resolución y resolución***

Una posible estrategia puede ser expresar la fuerza resultante, $\mathbf{F_{res}}$, y usar el segundo principio de la dinámica de Newton, para obtener la aceleración del avión, **a**. A partir de aquí, podríamos escribir las ecuaciones de la posición y de la velocidad. Sustituyendo la velocidad por $v_1$, podríamos obtener el tiempo que tarda el avión en alcanzar esta velocidad, $v_1$, y, finalmente, la distancia recorrida durante ese tiempo, que será la magnitud buscada D.

También podemos resolver el problema mediante consideraciones de trabajo y energía. Podemos aplicar el teorema de las fuerzas vivas para igualar el trabajo de la fuerza resultante, $W_{res}$, a la variación de energía cinética, $\Delta E_c$, y, luego, despejar la magnitud buscada D.




Para resolver el problema siguiendo esta segunda estrategia, vamos a adoptar un sistema de referencia con origen en la posición inicial del avión, tal como se indica en el dibujo adjunto. La transformación mecánica parte de un estado (1), en el que la velocidad del avión es cero y termina en otro estado (2), justo cuando alcanza la velocidad $v_1$. Llamamos **D** al vector que representa el desplazamiento del avión entre ambos estados. Su módulo, D, es la magnitud buscada.

En función de los parámetros del problema, el módulo de la fuerza resultante es:

$F_{res} = F_m - F_r - F_a = F_m - \rho\cdot R - F_a = F_m - \rho\cdot m\cdot g - F_a$

Como la fuerza resultante es paralela al vector desplazamiento y de su misma orientación, el trabajo de la fuerza resultante es:

$W_{res} = F_{res}\cdot D\cdot \cos(0^o) = (F_m - \rho\cdot m\cdot g - F_a)\cdot D$

Por su parte la variación de energía cinética es:

$\Delta E_c = E_c(2) - E_c(1) = ½\cdot m\cdot v_1^2 - 0 = ½\cdot m\cdot v_1^2$

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas ($W_{res} = \Delta E_c$) y despejando D, obtenemos finalmente:

$(F_m - \rho\cdot m\cdot g - F_a)\cdot D = ½\cdot m\cdot v_1^2 \rightarrow D = \dfrac{m\cdot v_1^2}{2\cdot(F_m - \rho\cdot m\cdot g - F_a)}$

Sustituyendo valores, resulta: D = 1210.8m ≈ 1.2km

***Análisis del resultado***

El resultado literal obtenido es dimensionalmente homogéneo (L en ambos lados) y, a falta de analizar con más detalle la influencia de la masa, contempla el resto de hipótesis que hemos planteado y los casos límite.

Para ver si predomina la influencia de la masa inercial (en el numerador) o de la masa gravitatoria (en el denominador), podemos dividir por m ambos (numerador y denominador), con lo que obtenemos:

$$D = \frac{v_1^2}{2 \cdot (F_m - F_a)/m - \rho \cdot g)}$$

En esta expresión alternativa del resultado se observa que al aumentar m, disminuye el denominador y, por tanto, aumenta la distancia buscada D. Por tanto, en este problema predomina el efecto de la masa inercial y, por tanto, se concluye que, cuanto mayor sea la masa de los aviones, mayor será D. En efecto, los aviones de mayor masa necesitan una pista de despegue de mayor longitud, y, de hecho, es bien conocido que algunos aeropuertos no pueden acoger a aviones demasiado “grandes”, precisamente por la cortedad de sus pistas.

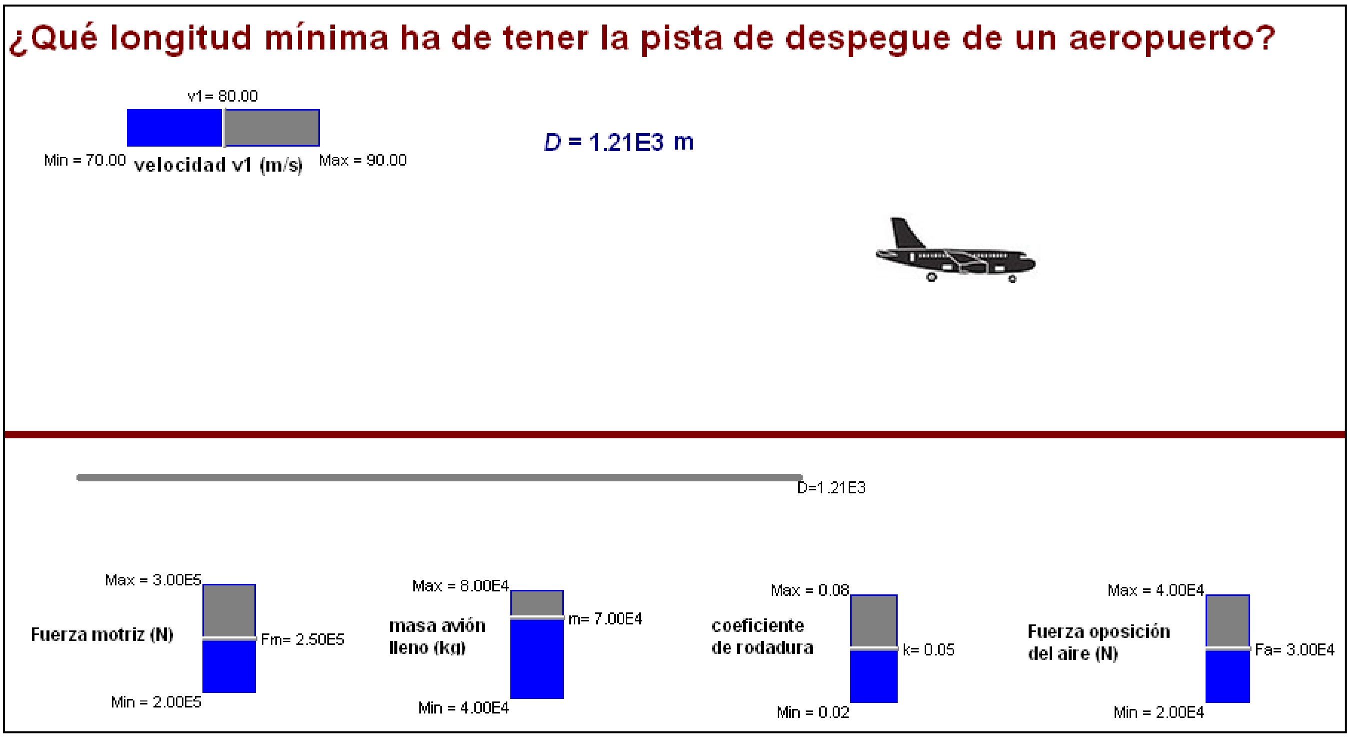
Debemos comparar también el resultado numérico particular obtenido con datos reales. Como hemos visto en el planteamiento del problema, el valor de D que hemos obtenido es inferior a la longitud que deba tener la pista de despegue. Si a los 1.2km le añadimos la distancia que puede recorrer el avión mientras efectúa las últimas maniobras de despegue y una distancia adicional de seguridad, obtendremos una longitud mínima para la pista de despegue entre 1.5 y 2 km de longitud. Es un resultado razonable, si tenemos en cuenta que los grandes aeropuertos disponen generalmente de alguna pista con una longitud entre 2.5 y 3 km. Los grandes aviones, con plena carga de combustible y de pasajeros (por ejemplo, el Boeing 747 o el Airbus 340) requieren de pistas de al menos 2,5 km para despegar y para aterrizar de forma segura. Por otra parte, la masa de estos grandes aviones oscilan entre 25 y 50 toneladas vacíos y entre 50 y 80 toneladas llenos (la masa del avión que hemos adoptado aquí es 70 toneladas). Otro dato del problema que podemos comparar con sus valores reales es el de la fuerza motriz aplicada por el avión en la maniobra de despegue. Las turbinas de un avión grande, como el que hemos considerado aquí, son capaces de desarrollar una potencia del orden de 100000 CV para mantener una elevada velocidad de crucero, del orden de 850km/h (236m/s). Teniendo en cuenta que 1CV son 735.499W y que la potencia es P = F·v, la fuerza motriz que aplica el motor en estas condiciones resulta: Fm = 311440 N. En la maniobra de despegue, el ordenador a bordo ajusta la potencia a aplicar teniendo en cuenta aspectos como la temperatura, altitud, atmósfera, etc. Por motivos de seguridad, los aviones tienen la potencia duplicada, con respecto a la máxima que se estima que podrían necesitar en determinadas situaciones. En nuestro caso, la fuerza motriz que da el enunciado del problema (250000), lo que representa aproximadamente un 80% de la fuerza motriz aplicada en vuelo a una velocidad muy elevada.

Finalmente, podemos comentar que la longitud de las pistas de diversos aeropuertos puede variar notablemente y ello influye de forma determinante en el servicio que pueden ofrecer. En España el aeropuerto de Barajas tiene la pista más larga del país, con una longitud de 4km. En el extremo opuesto, podemos citar, por ejemplo, al aeropuerto de San Sebastián, cuya pista apenas tiene una longitud de 1.7km. Este aeropuerto no puede albergar grandes aviones, pero sí aviones de pasajeros relativamente pequeños, que necesitan pistas que no superan un km.

**Refuerzo:**

Para reforzar los conceptos involucrados en este problema, hemos elaborado una animación *Modellus* que reproduce el movimiento del avión por la pista y su despegue cuando alcanza la velocidad $v_1$. En la pantalla se dispone de varios controladores manuales con los que los alumnos pueden modificar los parámetros del problema (Fm, m, Fa, ρ, $v_1$) y comprobar cómo afectan esas modificaciones a la distancia que recorre el avión por la pista antes de despegar, D.

La imagen siguiente corresponde a un instante posterior al despegue del avión, cuando los datos coinciden con los que hemos usado en esta resolución.




La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm