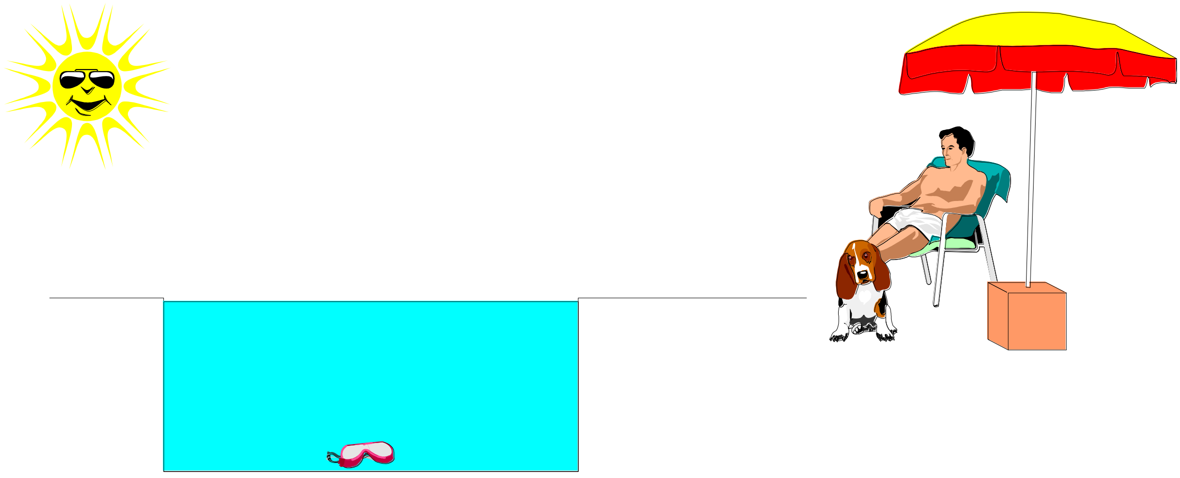
Determinad cuál será la máxima profundidad que puede tener una piscina completamente llena de agua, para que una persona sentada a 3,3 m del borde y cuya vista queda a una altura de 1,2 m sobre el suelo, pueda ver un objeto que se encuentra en el fondo y al centro de la piscina. (Anchura de la piscina 15 m. Índice de refracción del agua 1,33).



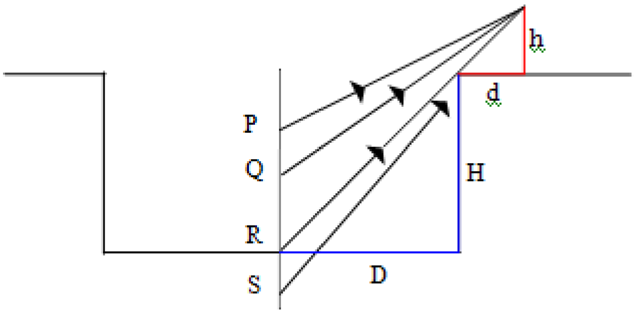
Planteamiento

El objeto situado en el fondo refleja la luz en todas direcciones y esto podemos representarlo mediante rayos o líneas rectas que parten del mismo y solo si alguno de dichos rayos alcanza al ojo de la persona, ésta podrá ver el objeto. Por otra parte, como los rayos parten de un objeto sumergido en el agua, experimentarán una refracción desviándose de la normal, por lo que este hecho alterará las condiciones necesarias para la observación del objeto desde la superficie. (De hecho, el propio suelo de la piscina actúa como un objeto y como el índice de refracción del aire es menor que el del agua, el fenómeno de la refracción hace que nos parezca que este se encuentra a menor profundidad de lo que realmente está, con el consiguiente peligro de confusión en personas que no saben nadar).

En este problema se nos pide la máxima profundidad que podría tener la piscina para que pudiera verse un objeto situado en su fondo, en determinadas condiciones. Conviene que analicemos el problema y reflexionemos en primer lugar sobre lo que ocurriría en una situación más sencilla que la planteada como sería el caso de que la piscina se encontrase totalmente vacía.

Piscina sin agua. Hipótesis

Si la piscina está completamente vacía, los rayos que salen del objeto no se desvían. Podemos representar la situación mediante la figura adjunta en la que se observa que desde la posición P hasta la R se ve el objeto, pero en la posición S (piscina más profunda) ya no se vería.



Reflexionando a partir de este dibujo, es lógico plantear que cuanto mayor sea la altura h desde la que se observa, mayor será la profundidad máxima *H* a la que sería posible ver el objeto (y que si *h* fuese 0 la profundidad *H* también lo sería). Por otra parte, cuanto mayor sea la distancia *d*, menor será *H*, ya que al alejarnos del borde el rayo debería inclinarse más para llegar a nuestros ojos (como caso extremo, podemos decir que cuando *d* tienda a infinito *H* tenderá a 0 y viceversa). Finalmente, cuanto mayor sea la distancia *D* del objeto a la pared de la piscina, mayor podrá ser *H*.

Así pues: *H* = f (*h*, *D*, *d*), que son datos presentes en el enunciado del problema.

Piscina sin agua. Estrategia de resolución, resolución y análisis del resultado

Si nos fijamos en la figura anterior podemos darnos cuenta que los dos triángulos que se forman son semejantes. Por tanto, podemos aplicar las relaciones de proporcionalidad entre sus lados para obtener la H buscada.

En efecto, la semejanza de triángulos nos permite escribir que:

$\frac{H}{D} = \frac{h}{d}$ de modo que despejando *H* obtenemos que: $H = \frac{h \cdot D}{d} = \frac{1{,}2 \cdot 7{,}5}{3{,}3} = 2{,}73 \text{ m}$

El resultado obtenido no solo es dimensionalmente homogéneo (L en ambos lados de la igualdad) sino que además contempla todas las hipótesis enunciadas anteriormente.

Podemos ahora ir más lejos y plantearnos qué es lo que ocurrirá cuando la piscina se llene completamente de agua.

Piscina llena de agua. Hipótesis

Sabemos que un haz de luz al pasar del agua al aire se refracta alejándose de la normal, por lo que podrán llegar al ojo del observador rayos desde puntos situados a mayor profundidad (como, por ejemplo, el punto S de la figura anterior). No obstante, también aquí habrá una cierta profundidad máxima *H’* > *H* a partir de la cual ya no se verá el objeto (que es precisamente la que nos piden en el problema).

Dicha profundidad máxima dependerá de los mismos factores *h*, *d* y *D* que antes, pero además influirá la diferencia en los índices de refracción entre los medios 1 (agua) y 2 (aire), ya que, de acuerdo con la ley de la refracción ($n_1 \cdot sen\hat{i} = n_2 \cdot sen\hat{r}$), cuanto mayor sea n_1 y menor sea n_2, mayor será el ángulo $\hat{r}$ de refracción. Por tanto, cuanto mayor sea la diferencia ($n_1 - n_2$), mayor será la profundidad máxima *H´* a la que se podrá ver el objeto. Naturalmente, si n_1 y n_2 fuesen iguales, *H’* se debería de hacer igual a *H*.

Piscina llena de agua. Estrategia de resolución y resolución propiamente dicha

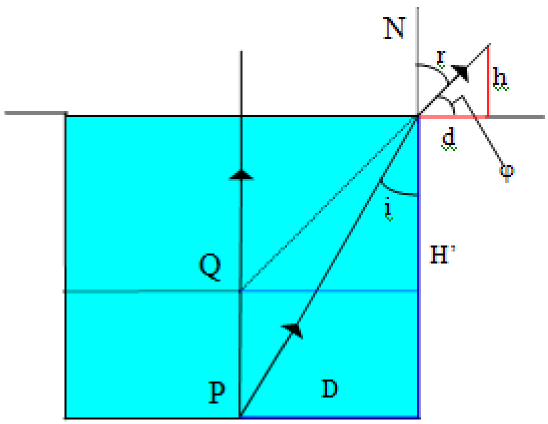
Para determinar H’ habrá que con conocer tg $\hat{i}$ ya que, como se puede ver en la figura:

$$tg\hat{i} = \frac{D}{H'}$$

De acuerdo con la ley de la refracción: $sen\hat{i} = \frac{n_2}{n_1} \cdot sen\hat{r}$, de modo que dividiendo por $\cos\hat{i}$ tenemos:

$$\text{tg}\,\hat{i} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\text{sen}\,\hat{r}}{\cos\hat{i}} \ .$$

Por tanto, si pudiésemos calcular $\frac{\text{sen}\,\hat{r}}{\cos\hat{i}}$ tendríamos resuelto el problema.



Para hacerlo, partimos de la figura anterior, de donde resulta:

$$\operatorname{sen}\hat{r} = \cos\phi = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}};\ \cos\hat{i} = \frac{H'}{\sqrt{H'^2 + D^2}} \qquad \text{Por tanto: } \operatorname{tg} i = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \cdot \frac{\sqrt{H'^2 + D^2}}{H'}$$

de donde podemos obtener finalmente:

$$H' = \frac{D}{n_2 \cdot d} \cdot \sqrt{h^2 n_1^2 + d^2 (n_1^2 - n_2^2)}$$

Y sustituyendo los datos: $H' = 7{,}5$ m

Análisis del resultado

Si analizamos el resultado literal que acabamos de obtener vemos en primer lugar que, efectivamente, tal y como habíamos supuesto, la profundidad es ahora mayor que la obtenida para la piscina sin agua. Por otra parte, contempla todas las hipótesis, incluyendo la de que cuanto mayor fuese n_1 y menor n_2, más grande sería la profundidad permitida. También podemos ver que para el caso particular de que $n_1 = n_2$ (por ejemplo, cuando se vacía la piscina), el resultado se convierte en el anterior, es decir, $H' = H$.

Una cuestión interesante que podemos plantearnos es *cuál sería la profundidad aparente que una persona* diría que tiene una piscina al observar su fondo desde una cierta distancia de la orilla.

Analizando la última figura, podemos ver que dicha profundidad coincidiría con la profundidad H calculada cuando hemos supuesto que la piscina estaba vacía, que es de donde parece provenir el rayo refractado, de modo que:

$$H' = \frac{D \cdot h}{d} \cdot \frac{\sqrt{h^2 n_1^2 + d^2 (n_1^2 - n_2^2)}}{n_2 \cdot h} = H \cdot \frac{\sqrt{h^2 n_1^2 + d^2 (n_1^2 - n_2^2)}}{n_2 \cdot h}$$

y despejando obtenemos finalmente:

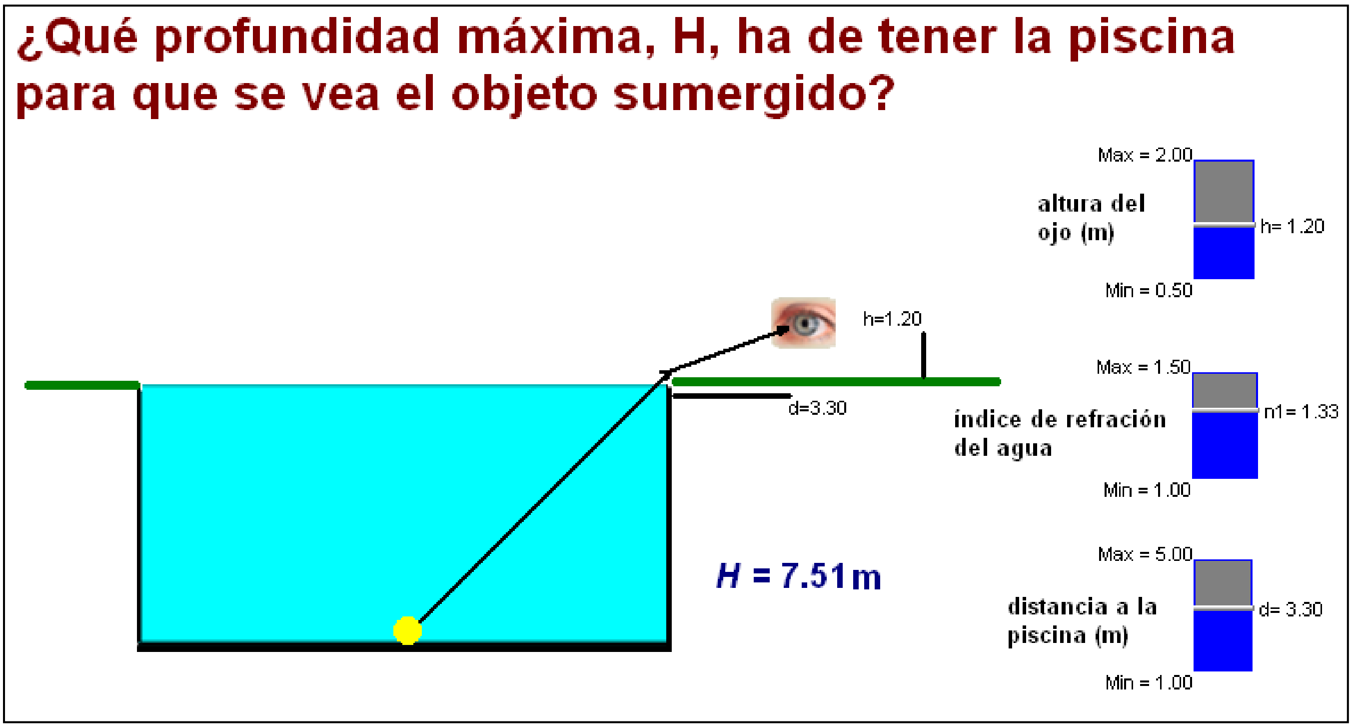
$$H = H' \cdot \frac{n_2 \cdot h}{\sqrt{h^2 n_1^2 + d^2 (n_1^2 - n_2^2)}}$$

Así el fondo de una piscina de 2 m de profundidad, visto desde la posición indicada, parecería estar a 0,73 m y resultar un serio peligro para quienes además de no conocer el fenómeno de la refracción tampoco sepan nadar.

Refuerzo:

Para reforzar los conceptos involucrados en este problema, se puede usar una animación *Modellus* que hemos elaborado sobre él. En la pantalla se muestra la situación y se dispone de tres controladores manuales con los que se pueden modificar los datos del problema (índice de refracción del agua, altura del ojo y distancia de la persona a la piscina). La animación calcula el valor de la profundidad máxima de la piscina que permite que se vea el objeto sumergido, ajustando el dibujo a cada caso concreto que determina el valor de los parámetros.

La imagen siguiente muestra el resultado cuando los datos coinciden con los que hemos usado en la segunda parte de esta resolución, es decir, con la piscina llena de agua. A partir de este caso particular, los alumnos pueden modificar cualquiera de los parámetros, para poner en juego sus hipótesis, incluyendo cualquiera de los casos límite. Por ejemplo, pueden hacer que disminuya el índice de refracción de la piscina hasta igualarlo al del aire (n = 1). Entonces, obtendrán la solución del primer caso que hemos obtenido aquí, correspondiente a una piscina vacía.



La animación y el programa para hacerl correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm