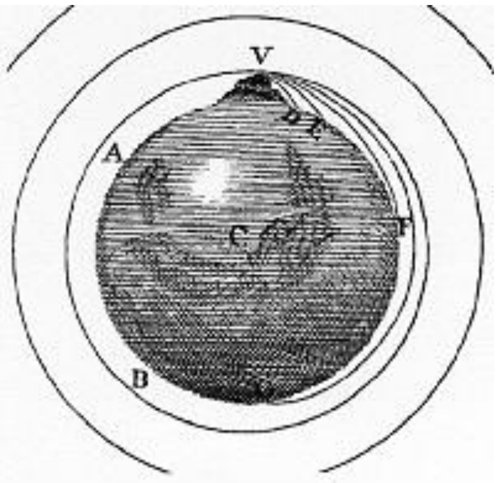
**Se quiere poner un satélite en órbita circular ¿Qué velocidad debe tener? Aplicar el resultado a la ISS y a un satélite geoestacionario. (Datos: altura de la ISS = 400 km; altura de la órbita geoestacionaria = 35.786 km; radio de la Tierra: 6350 km; masa de la Tierra = $5.98 \cdot 10^{24}$ kg)**

***Planteamiento***

Adoptaremos un sistema de referencia con origen en el centro de la Tierra y supondremos que es un sistema de referencia inercial, lo que es bastante razonable porque la aceleración de ese punto es bastante pequeña. Así mismo, supondremos que la Tierra es esférica y que su masa se distribuye de forma homogénea y/o con simetría radial respecto del centro. En cuanto al satélite, consideraremos que se puede asimilar a una masa puntual y que va a orbitar a una altura a la que podemos despreciar el rozamiento. Esto también es bastante razonable porque, aunque la atmósfera terrestre llega hasta una altura de unos 10000 km, el 75% de su masa se concentra en los primeros 11km. Finalmente supondremos que sobre el satélite en órbita se ejerce únicamente la fuerza de atracción de la Tierra, es decir, no consideraremos posibles interacciones con otros objetos (partículas de polvo, otros satélites, meteoritos, etc.)

El proceso real que se suele utilizar para enviar un satélite a su órbita consiste en ubicarlo dentro de un cohete y lanzar al espacio dicho cohete desde la superficie de la Tierra mediante un tiro oblicuo. En una segunda fase, cuando el satélite está en posición, la cúpula en la que va protegido se separa normalmente en dos mitades, aprovechando unas pequeñas detonaciones controladas. Este proceso resulta demasiado complicado para tenerlo en cuenta en la búsqueda de solución del problema. Como la magnitud que estamos buscando es la velocidad final que ha de tener el satélite cuando ya esté en órbita, imaginaremos un proceso hipotético más sencillo, en el que subiríamos al satélite hasta la altura deseada y luego, desde ahí, lo impulsaríamos con la velocidad adecuada, que le mantenga describiendo una órbita circular.

Este proceso hipotético entronca con el razonamiento de Newton, que previó posibles trayectorias de un cuerpo lanzado horizontalmente desde una colina V muy elevada (ver la figura adjunta). Si la velocidad inicial que se proporciona a dicho cuerpo es pequeña, tendrá un movimiento parabólico hasta caer en un cierto punto D. A muy pequeña escala (en comparación con el tamaño de la Tierra) esta trayectoria parabólica se puede obtener mediante la composición de un movimiento horizontal uniforme a la velocidad inicial del lanzamiento y un movimiento de caída vertical uniformemente acelerado con aceleración igual a g (hipótesis de Galileo). A partir de aquí, podemos pensar en aumentar la velocidad inicial del lanzamiento y vemos que al hacerlo el cuerpo llegará al suelo sucesivamente en los puntos E, F, etc. Hasta que, para un determinado valor de la velocidad inicial, v*, la relación entre el movimiento de avance horizontal y el de caída vertical del cuerpo coincidirá exactamente con la relación existente entre el avance horizontal del suelo terrestre y la caída de éste (dada la esfericidad de la Tierra). Cuando se cumpla esta condición el cuerpo se mantendrá siempre a la misma altura y, por tanto, estará "cayendo indefinidamente", mientras describe la pretendida trayectoria circular alrededor de la Tierra con una determinada velocidad de módulo constante, v*. Con una velocidad inferior a v* el mismo cuerpo terminaría tropezando contra el suelo terrestre, mientras que con una velocidad superior a v* describiría una órbita elíptica en lugar de circular o, si la velocidad fuera aún mayor, describiría una trayectoria abierta (hiperbólica) abierta que le alejaría cada vez más de la Tierra (ver el problema sobre la velocidad de escape).



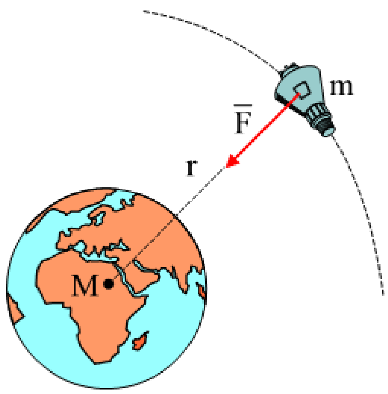
***Hipótesis***

Es lógico suponer que la velocidad, v*, del satélite en órbita circular dependa del radio de dicha órbita, r. Cuanto menor sea r, más cerca estará el satélite de la Tierra y, por ello, deberá ir más rápido para mantenerse en la órbita. Por tanto, si r aumenta v* ha de disminuir y si r disminuye v* ha de aumentar. Igualmente es lógico pensar que cuanto mayor pudiera ser la masa del cuerpo alrededor del cual describe la órbita el satélite, M, mayor también deberá ser la velocidad de éste, ya que el satélite se verá sometido a una fuerza de atracción también mayor. Por otra parte, puesto que la fuerza de interacción entre la Tierra y el satélite se obtiene con la ley de gravitación universal y en ella se incluye a la constante de gravitación, G, es lógico plantear también que G ha de incluirse en el resultado del problema. En un universo alternativo en el que G fuera mayor, la velocidad del satélite también debería ser mayor.

Finalmente, también deberíamos plantearnos una posible influencia de la masa del satélite en el resultado, si bien, distinguiendo entre la masa inercial y la masa gravitatoria. Por una parte, hay que tener en cuenta que cuanto mayor sea la masa (gravitatoria) del satélite, mayor será también la fuerza gravitatoria con la que lo atrae la Tierra y, por tanto, mayor deberá ser la velocidad v*. Pero, por otra parte, también deberemos tener en cuenta que cuanto mayor sea la masa (inercial) del cohete, menor será la aceleración en su movimiento orbital y, por tanto, menor podrá ser v*.

*Estrategia y resolución*

La velocidad del satélite cuando describe una órbita circular es, en todo momento, tangente a esa trayectoria circular. Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de atracción gravitatoria que le hace la Tierra y se dirige siempre hacia el centro de nuestro planeta, vemos que la fuerza resultante ejercida sobre el satélite y la aceleración correspondiente tienen en todo momento la dirección normal (perpendicular a la tangente). Sabemos que la aceleración normal de un movimiento circular uniforme es constante y su expresión depende del módulo de la velocidad. Por tanto, una estrategia posible es obtener dicha expresión de la aceleración (usando el tercer principio de la dinámica) y a partir de ella, obtener la velocidad.




Llevamos adelante esta estrategia, usando la ley de gravitación universal para expresar el módulo de la fuerza que se ejerce sobre el satélite:

$$F = F_g = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

Aplicando el tercer principio de la dinámica, obtenemos el módulo de la aceleración:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot M}{r^2} \quad (1)$$

Ya hemos dicho que es una aceleración normal, cuyo módulo, en función del de la velocidad buscada v* y del radio de la órbita, r, es:

$$a_n = \frac{v^{*2}}{r} \quad (2)$$

Así pues, combinando las ecuaciones (1) y (2) y despejando v, se obtiene finalmente:

$$\frac{G \cdot M}{r^2} = \frac{v^{*2}}{r} \rightarrow v^* = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

***Análisis del resultado***

El resultado obtenido es dimensionalmente correcto ($L/T^2$ en ambos miembros) y fácilmente se puede ver que se cumplen todas las hipótesis que habíamos planteado sobre la influencia de G, M y r. En cuanto a la influencia en el resultado literal de la masa gravitatoria, $m_g$, y de la de la masa inercial, $m_i$, se puede poner en evidencia manteniendo estas dos magnitudes en la expresión de la aceleración:

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m_i}} = \frac{G \cdot M \cdot m_g}{r^2 \cdot m_i}$$

Lo que nos lleva a la siguiente expresión de la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M \cdot m_g}{r \cdot m_i}}$$

En donde se comprueba que, efectivamente, cuanto mayor sea la masa gravitatoria del satélite, mayor es su velocidad orbital, mientras que cuanto mayor sea la masa inercial del satélite, menor es su velocidad orbital. La equivalencia entre masa inercial y masa gravitatoria implica que $m_g/m_i = 1$ y, por esta razón, la masa del satélite no aparece finalmente en el resultado del problema.

Tras estos análisis pasamos a calcular la velocidad orbital en los dos casos que solicita el enunciado.

En primer lugar, tenemos para la estación espacial internacional (ISS) h=400 km y, por tanto, r = Rt + h = 6350 + 400 = 6750 km. Siendo la masa de la Tierra: $M = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, se obtiene:

$$v_{ISS} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 11^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{6.75 \cdot 10^6}} = 7687 \frac{m}{s} \approx 7.70 km/s$$

En cuanto al satélite geoestacionario h=35786 km y, por tanto, r = Rt + h = 6350 + 35786 = 42136 km y, por tanto se obtiene:

$$v_{geoestacionario} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 11^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{42.135 \cdot 10^6}} \approx 3.08 km/s$$

Para tener una idea más intuitiva de cómo disminuye la velocidad orbital al irnos alejando de la Tierra, podemos calcular el periodo orbital, T, en estos dos ejemplos concretos. Después de tener en cuenta que $v = L_{circ.}/T$ y $L_{circ.} = 2 \cdot \pi \cdot r$, se obtienen los siguientes resultados (en horas):

$T_{ISS} = 1.54$ horas $\quad T_{geoestacionario} = 24$ horas

Como ya sabíamos, el satélite geoestacionario tarda un día exacto en describir una órbita circular alrededor de la Tierra, mientras que durante ese día a la estación espacial internacional (muy cercana a la Tierra) da 15.58 vueltas alrededor de nuestro planeta.

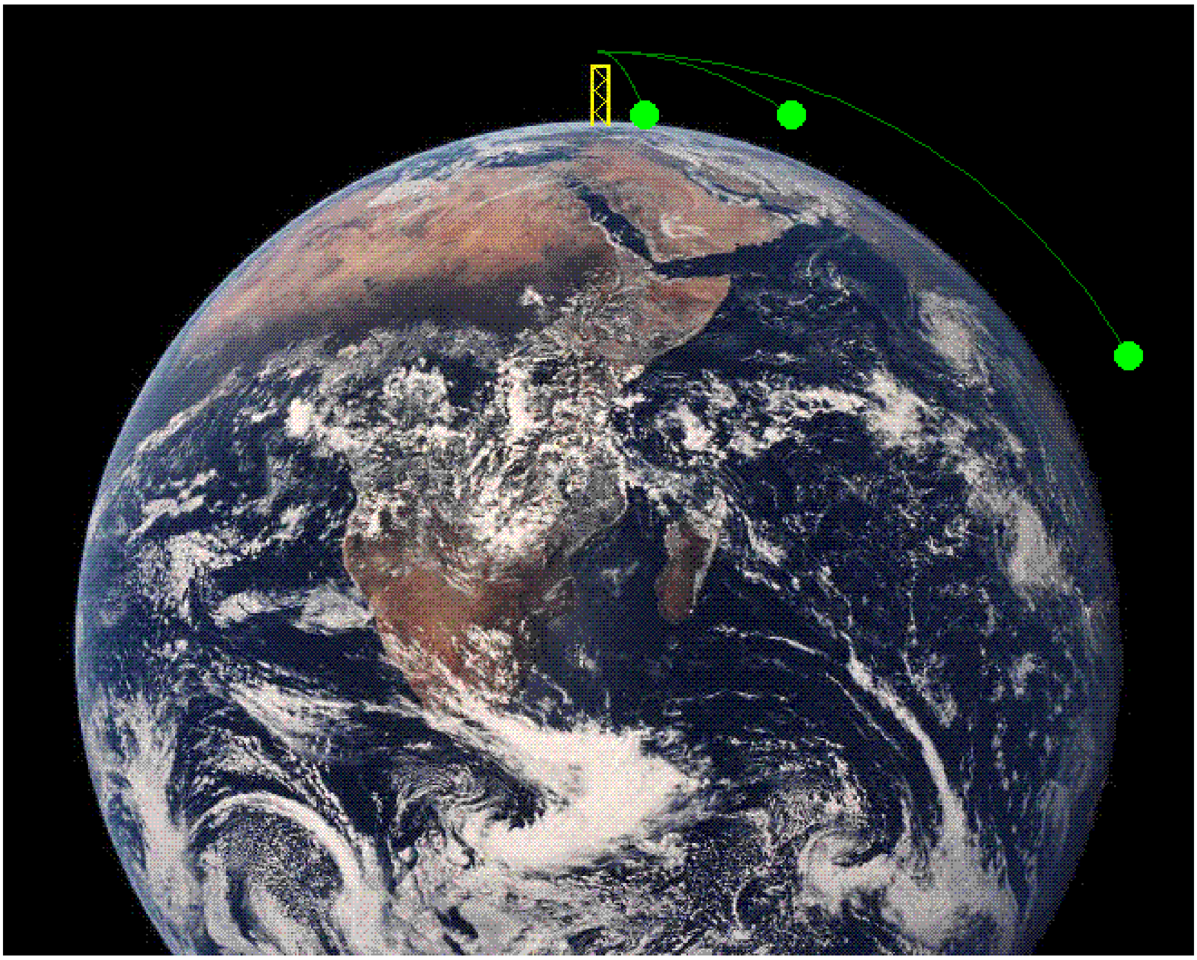
Desde que comenzó la era espacial, se ha colocado una gran cantidad de satélites abarcando un rango muy amplio rango de alturas. La tabla adjunta enseña los diferentes tipos de órbita y las aplicaciones de los satélites. Para que se tenga una idea del orden de magnitud del tamaño de las órbitas, aportamos también el radio en múltiplos del radio de la Tierra.

| ÓRBITA | ALTURA (en km) | RADIO (en Rt) | APLICACIONES |
|---|---|---|---|
| **LEO** (baja altura) | Por debajo de **5035km** (la mayoría entre **600km** y **1600km**) | Menos de **1.8Rt** | Buscapersonas, telefonía móvil, transmisión de datos. |
| **MEO** (media altura) | Entre **10075km** y **20150km** | Entre **2.59Rt** y **4.18Rt** | Posicionamiento |
| **GEO** (geoestacionaria) | **35786km** | **6.64Rt** | Telecomunicaciones |
| **HEO** (excéntrica) | Elíptica muy excéntrica (**70000km/ 1000km**) e inclinada unos 63º) | | Telecomunicaciones |

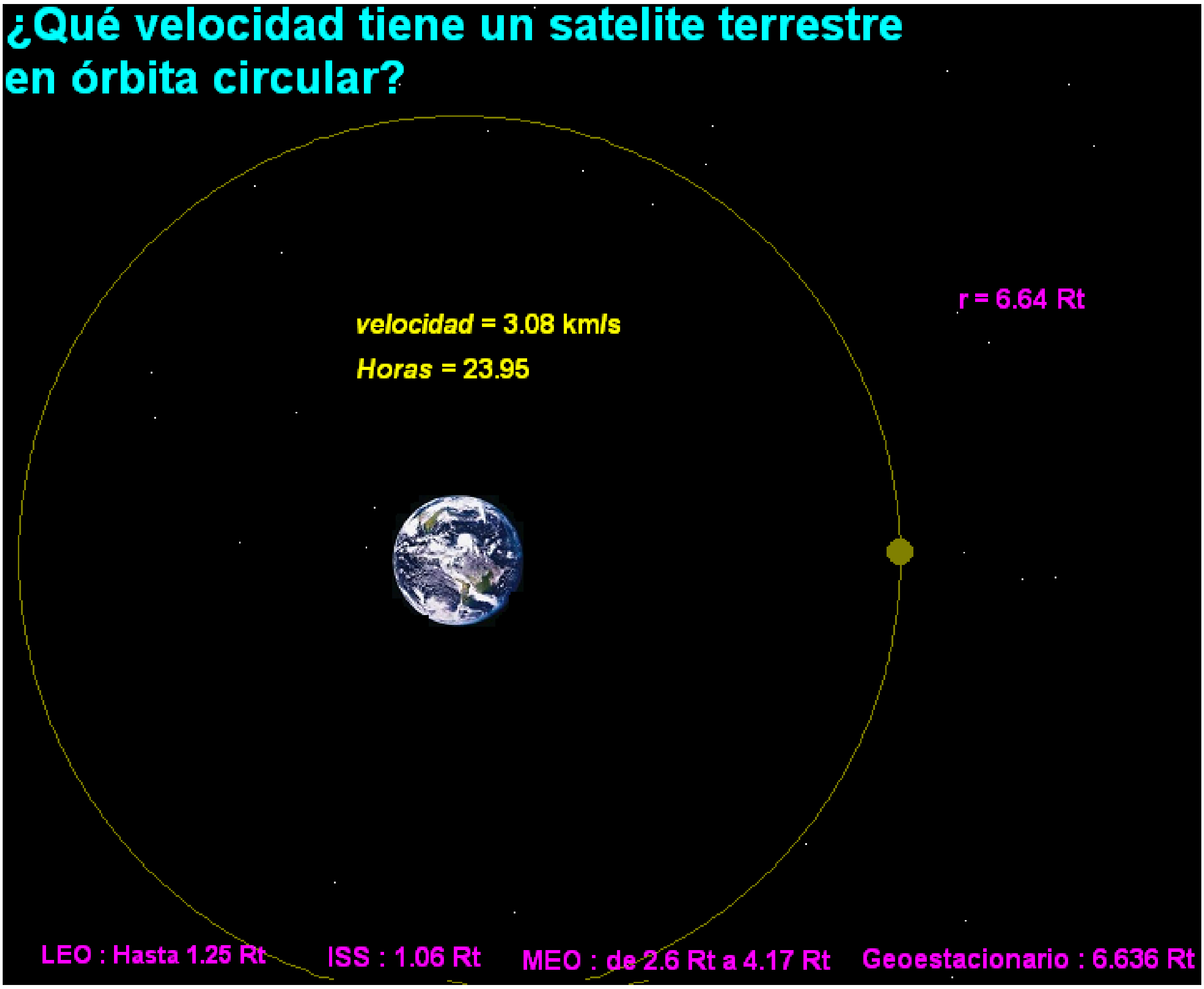
**Refuerzo:**

Para reforzar algunos de los conceptos involucrados en este problema hemos creado dos animaciones *Modellus*.

En la primera se simula el hipotético lanzamiento de cuerpos desde la colina de Newton que hemos usado en el planteamiento de este problema. Se muestra concretamente la trayectoria de tres cuerpos, dos con velocidad inferior a la velocidad buscada y el tercero con la velocidad adecuada para que el cuerpo se mantenga en órbita.



En la segunda animación se representa el movimiento de un satélite terrestre describiendo una órbita circular completa. La animación calcula la velocidad y el periodo y va informando del tiempo que va transcurriendo (en horas) mientras el satélite describe la órbita. En la parte inferior de la pantalla se informa de los valores del radio de las órbitas LEO, MEO, GEO y la de la estación espacial internacional (ISS), con el fin de que los alumnos las puedan introducir, o bien usando un controlador manual disponible en la pantalla, o entrando en la ventana de las condiciones iniciales. Los valores de los radios de las órbitas se han de introducir en radios terrestres y, tanto la Tierra, como dichas órbitas quedan representadas en la pantalla en esa misma escala. La imagen adjunta corresponde a la secuencia final en la órbita geoestacionaria (GEO).




Las dos animaciones y el programa para hacerlas correr están disponibles en la página “Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física”, de la Sección Local de Alicante de la RSEF
http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm