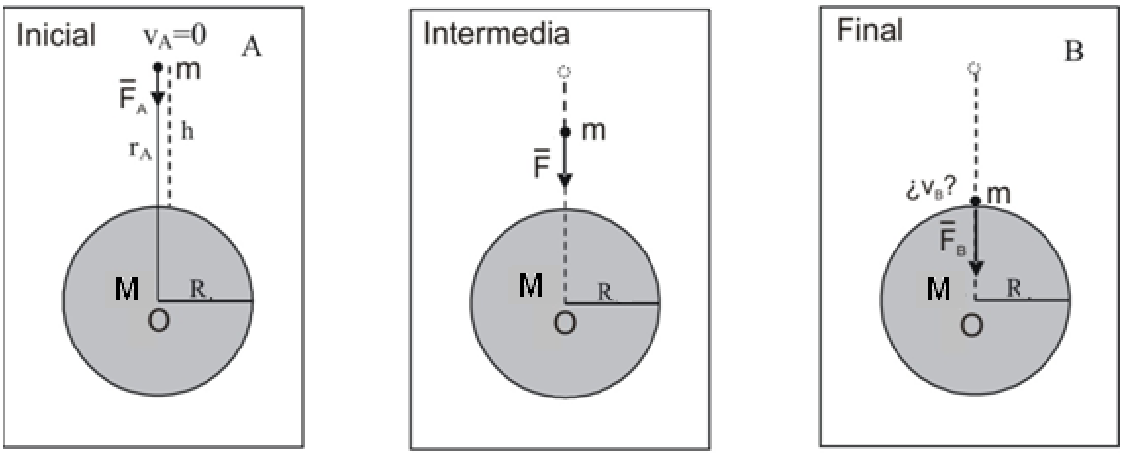
Se deja caer un cuerpo desde una gran altura. ¿Cuál será su rapidez en el instante en que choque contra el suelo?

Presentación de la situación problemática, discusión de su posible interés, precisión del problema y análisis cualitativo de la situación.

Vamos a manejar el sistema formado por un objeto de masa m y un astro al que consideraremos inmóvil. Supondremos que el cuerpo se halla a una altura inicial h lo bastante grande como para que **no** se pueda considerar constante a la aceleración de la gravedad generada por el astro. Como para resolver el problema usaremos algunas leyes de dinámica y gravitación solo aplicables a cuerpos puntuales, supondremos que el objeto en cuestión tiene todas las características necesarias para poder ser considerado como tal. Así mismo, supondremos que el astro es esférico y que su masa total M se halla distribuida de forma homogénea en toda la esfera. Estas condiciones se cumplen de manera aproximada en diversos planetas y satélites de nuestro sistema solar, como, por ejemplo, la Tierra y la Luna. Por tanto, se trata de un problema que tiene un indudable interés práctico, por su posible aplicación al estudio de lanzamientos de satélites, misiones espaciales, caídas de meteoritos, etc.

Durante la caída el cuerpo está sometido a la acción de la fuerza gravitatoria ejercida por el astro. Como dicha fuerza siempre va dirigida hacia el centro del mismo, el caso más sencillo es suponer (como sugiere el enunciado) que se parta de una velocidad inicial nula. Entonces, el cuerpo tendrá un movimiento rectilíneo, aumentando su velocidad (aunque no de manera uniforme, ya que la fuerza de atracción gravitatoria F no es constante, sino que va aumentando conforme el cuerpo se acerca al astro). Como consecuencia de ello, la determinación cinemático-dinámica de la rapidez al llegar al suelo, no es una tarea sencilla. En la figura siguiente se muestra la situación planteada de forma esquemática. En ella, el vector representa la fuerza de atracción gravitatoria, M es la masa del astro, m la del objeto y R el radio del astro.



Cabe esperar que la rapidez v con la que choca, para una masa y un radio del astro que tienen unos determinados valores, dependerá de la altura inicial h desde la que se inicia la caída, de modo que v aumentará cuanto mayor sea el valor de h. Es evidente que si la h valiese 0 la v sería 0. Además, en el caso de que la altura fuese lo bastante pequeña como para que pudiésemos considerar constante la aceleración de la gravedad, el objeto llevaría un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y la rapidez valdría: v = $\sqrt{2g_0h}$ en donde g_0 tendría el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie del astro.

Posibles estrategias de resolución

Suponiendo que no exista rozamiento (o que éste se pueda considerar despreciable), en el sistema considerado no hay fuerzas exteriores y, por tanto, el trabajo exterior es 0. Además, por tratarse de una masa puntual no se produce calor. En estas condiciones podemos concluir que, aunque cambien la energía cinética y la energía potencial del sistema, la suma de ambas (energía mecánica, E) permanecerá constante. Por tanto, una forma sencilla de obtener la rapidez pedida sería aplicar la expresión $W_{ext} = \Delta E$ (donde $E = E_c + E_p$), tomando como estado inicial (A) del sistema cuando se suelta el cuerpo y como estado final (B) la situación del sistema en el momento en que el cuerpo impacta contra la superficie del astro.

Otra posibilidad sería aplicar al cuerpo que se deja caer el llamado "teorema de las fuerzas vivas" ($W_{res} = \Delta Ec$) en donde la fuerza resultante sobre el cuerpo sería la fuerza gravitatoria con que el astro lo atrae (cuyo valor iría cambiando con la distancia r al centro del mismo).

Resolución, análisis de los resultados, implicaciones y nuevas perspectivas.

Siguiendo la primera estrategia:

$W_{ext} = \Delta E$; como $W_{ext} = 0 \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0$ y sustituyendo:

$$\left(\frac{1}{2}mv_B^2 - 0\right) + \left(-\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{r}\right) = 0 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2GMh}{r \cdot R}}$$

Teniendo en cuenta que $GM = g_0 \cdot R^2$ y que $r = R + h$: $\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2g_0 R \cdot h}{R + h}}}$.

Dividiendo arriba y abajo por h obtenemos: $\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2g_0 R}{(R/h)+1}}}$

Tras esta resolución literal, podemos sustituir algunos datos numéricos y obtener el valor de la rapidez para algún caso concreto, como, por ejemplo, podría ser la Luna. En ese caso, para una altura igual al radio de la Luna (unos 1737 km), teniendo en cuenta que g_{0L} = 1'62 N/kg, se obtiene: v_B = 1677'48 m/s (lo que equivale a 6038'93 km/h). Podríamos pensar también en aplicar este mismo resultado a nuestro propio planeta. No obstante, para poder hacerlo, deberíamos considerar despreciable la influencia de la atmósfera terrestre durante la caída, lo cual (a diferencia de lo que ocurre en la Luna donde prácticamente no hay atmósfera), se halla bastante lejos de la realidad.

Si nos fijamos en la última expresión obtenida, podemos ver, en primer lugar, que es dimensionalmente homogénea (L/T en ambos miembros); si no lo fuese es seguro que el resultado sería incorrecto. Por otra parte, tal y como habíamos supuesto, cuanto mayor sea el valor de h, mayor es el valor de la rapidez con que el cuerpo choca contra el suelo.

En cuanto a los casos límite considerados, es evidente que si $h \rightarrow 0$ la $v_B \rightarrow 0$. Además si h es muy pequeño frente a R, podemos despreciar el 1 del denominador frente a R/h con lo que nos quedaría:

$$v_B = \sqrt{\frac{2g_0 R}{(R/h)}} = \sqrt{2g_0 \cdot h}$$

que es, precisamente, el resultado obtenido cuando se puede hacer la simplificación de suponer que el movimiento de caída es un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.

El resultado obtenido también nos permite percatarnos de algo que al comienzo no se nos había ocurrido. En efecto: en principio, cabe pensar que cuanto más lejos del astro se "deje caer" al cuerpo, mayor será la rapidez con que impactará contra el suelo. Ahora bien: ¿se trata de un proceso que no tiene ningún límite? En otras palabras: ¿la rapidez del impacto crece indefinidamente con la distancia h?

El resultado literal obtenido nos permite contestar a esta importante cuestión ya que resulta evidente que cuando h $\rightarrow \infty$, la $v_B \rightarrow \sqrt{2g_0R}$. Así, un meteorito impactará sobre la superficie de la Luna con una velocidad máxima de:

$$v_B = \sqrt{2g_{0L} \cdot R_L} = \sqrt{2 \cdot 1.62 \cdot 1737000} = 2372'3 \text{ m/s}$$

Perspectivas abiertas. Nuevos problemas.

Los resultados y conclusiones a que hemos llegado solo son válidos para las condiciones que hemos considerado imperantes en el problema: el objeto parte del reposo hacia un astro inmóvil y no hemos incluido el rozamiento. Sin embargo, el rozamiento está presente y su influencia es muy importante en el caso de la Tierra, donde el problema resulta del mayor interés, no sólo pos su posible aplicación a situaciones típicas de la ingeniería espacial (lanzamiento de proyectiles, regreso de misiones espaciales, etc.) sino también, por su aplicabilidad en el estudio de la caída de diversos cuerpos, como gotas de lluvia, bolas de granizo, meteoritos, etc. Por tanto, podemos plantear el siguiente problema:

Teniendo en cuenta la influencia del rozamiento con la atmósfera, ¿Cómo evolucionará la velocidad de un objeto que se deja caer hacia la Tierra? ¿Con qué velocidad impactará contra el suelo?

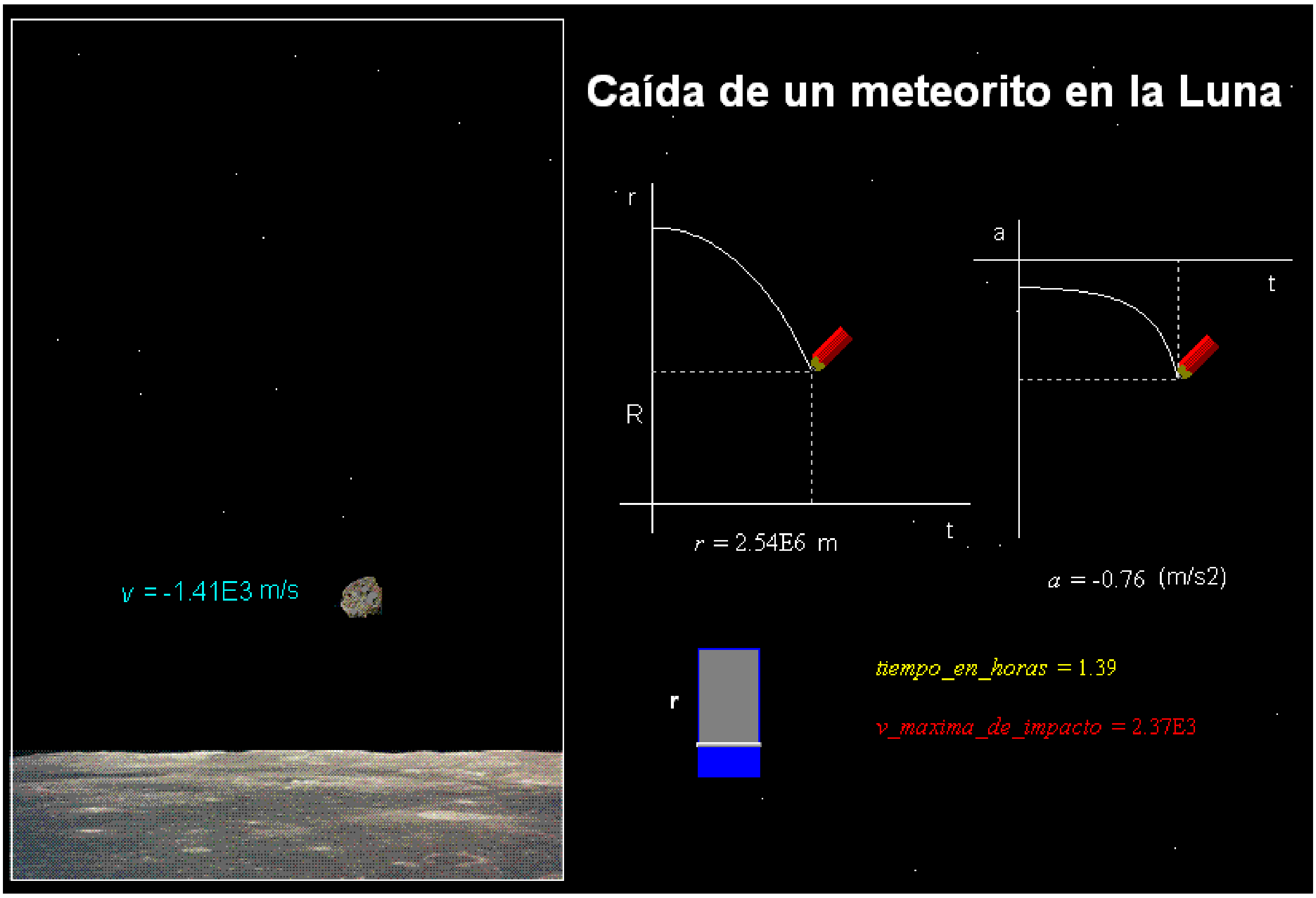
No menos interesante, puede resultar también el problema inverso al aquí mostrado, relacionado con la llamada "velocidad de escape".

¿Con qué velocidad mínima debería lanzarse un objeto desde la superficie de un astro para que no regresara a ella?

Refuerzo:

Los estudiantes pueden ampliar el estudio de este problema con una animación *Modellus*, que hemos elaborado sobre él. En la pantalla se muestra la caída de un meteorito hacia el suelo de la Luna, se calculan en cada instante los valores de su posición, velocidad y aceleración, y se van representando paulatinamente las gráficas de la evolución de la posición y de la aceleración. Los alumnos, antes de usar la animación, pueden enfrentarse a la representación cualitativa de dichas gráficas y puede ser bastante instructivo que lo hagan dos veces, adoptando en cada una de ellas un sistema de referencia diferente: el adoptado en la resolución literal del problema (en el que la velocidad y la aceleración siempre son positivas) y el que hemos adoptado en la animación, cuyo origen se sitúa en el centro de la Luna y con un criterio de signos tal que todas las posiciones del meteorito resultan positivas (y, en consecuencia, tanto la velocidad como la aceleración son siempre negativas). Finalmente, pueden entrar en la ventana de las condiciones iniciales y modificar la posición inicial del meteorito y/o su velocidad inicial. Pueden, por ejemplo, aumentar todo lo que deseen la distancia inicial y comprobar que la velocidad en el momento del impacto nunca llega a alcanzar el valor máximo que hemos calculado anteriormente ($2.73 \cdot 10^6$ m/s). Finalmente, también es interesante que los estudiantes consulten la ventana donde está escrito el modelo físico-matemático de la animación para comprobar que la aplicación resuelve el problema aplicando las leyes de la dinámica Newton al meteorito, como propusieron al plantear la primera de las estrategias en el proceso de resolución, pero no pudieron ir más allá, por las dificultades matemáticas propias de este nivel.

La imagen adjunta corresponde a una secuencia intermedia de la caída, bastante antes de que el meteorito impacte con el suelo lunar y habiendo empezado a caer desde una distancia del centro de la Luna igual a tres radios lunares.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF
http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm