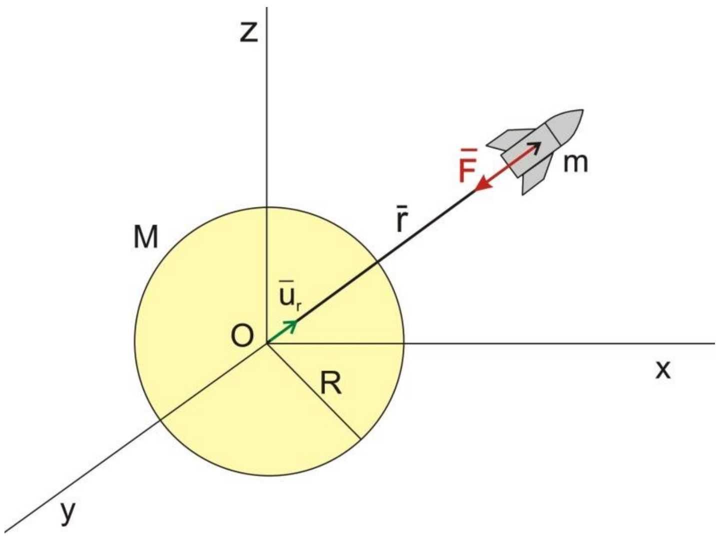
Se quiere lanzar un cohete al espacio. ¿Con qué velocidad inicial mínima habría que lanzarlo para que no volviese a caer a la Tierra?

Planteamiento cualitativo

Como el cohete tiene una masa muy pequeña comparada con la de la Tierra (o con la de cualquier otro astro desde donde pudiera realizarse el lanzamiento), nos interesa adoptar un sistema de referencia (SR) con origen en el centro de ella. Para aplicar respecto a dicho SR las leyes de la mecánica de Newton, consideraremos que es inercial, a pesar de que el movimiento de traslación de la Tierra (o del cuerpo celeste), no es rectilíneo ni uniforme. Esto es razonable porque cuando consideramos el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, la aceleración del centro del planeta (y, también, la de cualquier punto de su superficie, desde el que lanzaremos el cohete) es (en comparación con la velocidad y con aceleración inicial del cohete) muy pequeña.

Para simplificar el problema consideraremos a la Tierra esférica, supondremos que el cohete se lanza en dirección vertical y también que sobre él sólo actúa la fuerza de atracción gravitatoria que le ejerce la Tierra. Esta simplificación implica no tener en cuenta la influencia de la fuerza de rozamiento, a pesar de que el rozamiento es importante en el tramo inicial del movimiento, mientras el cohete atraviesa la atmósfera terrestre y que el cohete no lleva ningún tipo de motor ni sistema que le empuje. También implica despreciar las fuerzas que ejercen al cohete otros objetos del Cosmos (por ejemplo, la Luna, el Sol,..). Esto último resulta muy razonable porque estas fuerzas son muchísimo más débiles que la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra, debido a que estos objetos están mucho más alejados del cohete que la Tierra.



Aceptando estas condiciones, la trayectoria del cohete será rectilínea y vertical, ya que la fuerza que se ejerce sobre él es una fuerza central, dirigida siempre hacia el origen de nuestro SR (con origen en el centro de la Tierra). Dicha fuerza[1] la podremos calcular, aplicando la expresión vectorial de la ley de gravitación universal:

$$\mathbf{F} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}\mathbf{u}_r$$

[1] En este problema se utiliza la letra negrilla para las magnitudes vectoriales como fuerza, aceleración, etc.

En la expresión anterior, G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la Tierra, la Luna o de cualquier otro astro del sistema solar desde donde se suponga que se realiza este lanzamiento, m es la masa del cohete, r la distancia al centro de la Tierra (u otro astro que se considere) y $\mathbf{u_r}$ un vector unitario que siempre tendrá su origen en el centro de la masa M creadora del campo gravitatorio y sentido hacia el punto en el que se aplica la fuerza **F** (en este caso, el cohete).

De acuerdo con la expresión anterior, tanto el módulo de la fuerza, como el de la aceleración correspondiente:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{\mathrm{m}} = -\frac{G \cdot M}{r^2}\mathbf{u}_r$$

son inversamente proporcionales al cuadrado de distancia, r, entre el cohete y el origen del SR. Por tanto, a medida que, r, vaya aumentando, el módulo de **F** y el de **a** irán disminuyendo, resultando un movimiento acelerado del cohete, pero con una aceleración paulatinamente decreciente. Como dicha aceleración variable siempre es opuesta al sentido del movimiento, podemos imaginar dos situaciones:

a) Que en algún momento es valor del módulo de la aceleración sea suficiente para hacer que la velocidad del cohete llegue a ser cero a una altura determinada. En ese caso, en cuanto el cohete alcance esa máxima altura, invertirá el sentido de su movimiento y volverá a caer.

b) Que el ritmo de decrecimiento del módulo de la aceleración, sea, en comparación con el de la velocidad inicial o velocidad de lanzamiento, insuficiente para hacer que la velocidad del cohete llegue a anularse en ningún momento. Entonces, el cohete se alejará indefinidamente de la Tierra.

Se trata de obtener la mínima rapidez inicial que debería tener el cohete para que esto último ocurra. Dicha rapidez inicial mínima a partir de la cual un cohete lanzado en las condiciones anteriormente especificadas, no regresará nunca al punto de lanzamiento, la llamaremos a partir de ahora velocidad de “escape”, v_e y es, por tanto, la magnitud buscada en el problema.

Hipótesis. ¿De qué factores dependerá y cómo dependerá la velocidad de escape?

Es razonable suponer que, a igualdad de los restantes factores, la velocidad de escape, v_e, dependa de la masa M y de la distancia, r, desde la cual se lanza el cohete, distancia que, en el caso particular de que el lanzamiento se realice desde la superficie, coincidirá con el radio, R, de la Tierra (o del astro que, en general, se considere). Concretamente, cabe esperar que, en ese caso, a igualdad de los restantes factores, v_e sea tanto mayor cuanto mayor sea M y menor sea R.

También podemos prever que la constante de gravitación, G, estará incluida en la expresión de la velocidad de escape, puesto que determina la fuerza que se ejerce sobre el cohete (ley de gravitación universal) y la correspondiente aceleración. Aunque G es una constante universal, podemos imaginar un universo en el que el valor de G fuera mayor o menor que el establecido en el nuestro. Entonces, si G aumentara, lógicamente v_e, también debería aumentar, puesto que, de acuerdo con la ley de Newton de la gravitación, la fuerza de atracción sobre el cohete (para unos valores dados de M, m y R) también aumentaría.

Finalmente, también deberíamos plantearnos una posible influencia de la masa del cohete en el resultado. Previsiblemente se habrán realizado antes que este, varios problemas en los que se hayan puesto de relieve las influencias de la masa gravitatoria y la masa inercial. Con esta base, aquí podemos aventurar que ambas influencias existirán y se compensarán en este problema. En efecto, por una parte, es lógico plantear que cuanto mayor sea la masa (gravitatoria) del cohete, mayor será también la fuerza gravitatoria con la que es atraído y, por tanto, mayor deberá ser la velocidad de escape. Pero, por otra parte, también deberemos tener en cuenta que cuanto mayor sea la masa (inercial) del cohete, menor será la aceleración en su movimiento de ascensión. En el planteamiento acabamos de ver, al compensarse la influencia de ambas masas, la masa del cohete no aparece finalmente en la expresión de su aceleración y, por tanto, podemos esperar que tampoco aparezca en la expresión de la velocidad de escape.

En resumen, prevemos que:

$$v_e = f\,(R, M, G)$$

Estrategias de resolución y resolución propiamente dicha

Una posible estrategia, puede ser partir de la ecuación fundamental de la dinámica y de la ley de la gravitación universal, para obtener la ecuación de movimiento del cohete:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \rightarrow -G\frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \mathbf{u_r} = m \cdot \mathbf{a} \rightarrow -\frac{GM}{r^2} \cdot \mathbf{u_r} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt}$$

A partir de la última expresión obtenida, se puede llegar a una ecuación diferencial (ecuación del movimiento) con la que podríamos resolver el problema. Esencialmente se trataría de buscar qué valor inicial de la velocidad correspondería a un movimiento en el que el cohete pudiera llegar a distanciarse indefinidamente de forma que justamente cuando se diese $r = \infty$, su velocidad llegara a anularse ($v = 0$). El desarrollo operativo que se requiere para llevar adelante esta estrategia supera el nivel del Bachillerato.

Otra estrategia posible (más rápida y sencilla), es aplicar la expresión que relaciona el trabajo resultante sobre el cohete con el cambio experimentado por la energía cinética entre los estados A (cuando es lanzado) y B (cuando llega al infinito con rapidez final nula) y, a partir de la ecuación obtenida, despejar v_A, que, en este supuesto, coincidirá con la velocidad de escape v_e buscada.

Procederemos, a *resolver el problema de acuerdo con esta segunda estrategia*:

$$W_{res\,A}^{\;B} = \Delta Ec \rightarrow W_{F\,A}^{\;B} = \Delta Ec$$

Como la fuerza gravitatoria es conservativa: $W_{F\,A}^{\;B} = -\Delta Ep$, de modo que: $-\Delta Ep = \Delta Ec$.

Esta expresión puede ponerse como $Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B$, en la que:

$Ep_A = -GMm/R$; $Ep_B = 0$; $Ec_B = 0$; $Ec_A = \dfrac{mv_A^2}{2}$ y sustituyendo:

$-GMm/R = -\dfrac{mv_A^2}{2}$. Despejando obtenemos $v_A = \boxed{v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}}$

Finalmente, como $G \cdot M = g_0 \cdot R^2$, obtenemos: $v_e = \sqrt{2g_0 \cdot R}$

El resultado obtenido es aplicable a cualquier astro con las características que aquí se han considerado (sustituyendo g_0 y R por los valores correspondientes a dicho astro). En el caso particular de la Tierra, el valor mínimo de la velocidad con que habría que lanzar un cuerpo (de cualquier masa) para que no regrese de nuevo atraído por la gravedad terrestre (velocidad de escape) sería de 11’2 km/s = 40320 km/h. No obstante, se trata de un valor bastante inferior al real ya que, para obtenerlo, hemos ignorado el importante papel que desempeña la fricción con la atmósfera terrestre[2]. Mucho más cercano a la realidad, sería el caso de un lanzamiento igual desde la Luna, donde es perfectamente lícito suponer que no hay atmósfera. En ese caso, tomando como valores g_0 = 1'6 N/kg y R = 1737 km, se obtiene una velocidad de escape de 2'36 km/s = 8487'5 km/h. Como se puede ver, un valor bastante inferior al caso de la Tierra. Estos resultados, obviamente, tienen mucho interés en ingeniería espacial.

Análisis del resultado

Lo primero que debemos observar en el resultado obtenido es que es dimensionalmente homogéneo (L/T^2 en ambos lados de la ecuación). Así mismo, podemos ver que se cumplen todas las hipótesis que habíamos planteado.

Algunas perspectivas abiertas

La velocidad de escape tiene otra implicación muy interesante, que está relacionada con una de las condiciones necesarias (aunque no suficiente) para que pueda existir vida en un cuerpo celeste: la presencia o no de una atmósfera idónea. Para ver esta relación entre la velocidad de escape y la posible presencia de atmósfera, podemos pensar concretamente en los casos de la Tierra y la Luna. Se sabe que en la Luna ha habido agua (todavía quedan restos de hielo en los cráteres en sombra de los polos). Es posible que esa agua proviniese de ciertos asteroides o cometas que impactaron sobre la Luna. También es posible que se produzca agua por los iones hidrógeno presentes en el viento solar que pueden reaccionar con el oxígeno de algunos minerales. En cualquier caso, la cuestión es por qué, si la Tierra y la Luna se encuentran a la misma distancia del Sol, el proceso de evaporación del agua ha hecho que la mayor parte del agua de la Luna haya desaparecido mientras que no ocurre así con las moléculas de agua terrestres que quedan atrapadas por la atracción gravitatoria de nuestro planeta. La explicación está relacionada, sin duda, con el hecho de que la velocidad de escape de la Luna es muy inferior a la velocidad de escape de la Tierra, por lo que durante el proceso de evaporación del agua en la Luna, muchas moléculas se mueven a velocidades superiores a la velocidad de escape y logran vencer así la atracción gravitatoria lunar sobre ellas.

El concepto de velocidad de escape no es aplicable únicamente al lanzamiento de objetos desde el "suelo" y en dirección vertical, sino también en otros casos, como, por ejemplo, el posible lanzamiento de objetos desde una determinada altura pero con velocidad horizontal (de especial importancia en la puesta en órbita de satélites en torno a la Tierra).

Desde la superficie terrestre lanzamos un satélite verticalmente hacia arriba y cuando se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra, le comunicamos una cierta velocidad horizontal. Teniendo en cuenta que la energía potencial gravitatoria es siempre una cantidad negativa y la cinética es positiva, analizad qué posibilidades podrán darse en cuanto a la energía mecánica tras el lanzamiento horizontal y qué le ocurriría al satélite.

Una vez realizado el lanzamiento horizontal y considerando el sistema formado por la Tierra y el satélite (sistema aislado), caben tres posibilidades:

a) Que la energía mecánica sea negativa. $E = -GMm/r + mv^2/2 < 0$

En este caso la energía potencial en valor absoluto es mayor que la energía cinética de modo que al sumar las dos obtenemos un valor negativo para E. Al tratarse de un sistema aislado dicho valor se mantiene

[2] Dado que el grosor de la capa de aire que interviene realmente en el rozamiento con el cohete que se lance es despreciable en comparación con el radio terrestre, el resultado obtenido es válido, suponiendo que el cohete tiene un sistema de propulsión que funciona acelerándolo mientras atraviesa dicha capa y considerar la velocidad de escape como la que debería haber adquirido el cohete, en cuanto deja la atmósfera y se anula el sistema de propulsión.

constante aunque el sistema evolucione. Eso significa que cuando el satélite se aleje de la Tierra (aumente su energía potencial) y vaya cada vez más lento (su energía cinética disminuirá), todo ha de ocurrir de forma que la suma de ambas energías se mantenga constante (y negativa); por tanto, existirá una distancia máxima, más allá de la cual no podrá alejarse el satélite. Se puede demostrar (mediante razonamientos cuya complejidad excede este nivel) que en esta situación, el satélite seguiría una trayectoria elíptica con el centro de la Tierra en uno de los focos de la elipse. Éste es el caso de los planetas en torno al Sol y de los satélites que se encuentran en órbita alrededor de la Tierra o de las lunas de un planeta. Son objetos que permanecen ligados a otro más masivo y que, aunque se empleara toda su energía cinética en tratar de alejarlos definitivamente de él, esto no se conseguiría.

b) Que la energía mecánica sea nula. $E = -GMm/r + mv^2/2 = 0$

En este caso el valor absoluto de la energía potencial ha de coincidir en todo momento con el valor de la energía cinética (que siempre es positivo) de forma que al sumar las dos energías el resultado sea E = 0. Esto puede interpretarse de la forma siguiente: El satélite se puede alejar indefinidamente de la Tierra de modo que cuando su velocidad tiende a 0, también tiende a 0 la energía potencial. En cualquier punto la velocidad que lleve el satélite será tal que sumando las energías potencial y cinética el resultado sea 0. A una distancia infinita de la Tierra la velocidad del satélite sería 0 (no tendría energía potencial ni cinética). En este caso, se puede demostrar que la trayectoria descrita por el satélite sería una trayectoria abierta en forma de parábola. El valor de la velocidad horizontal con que sale, sería también, el de la velocidad de escape y vendría dado (despejando de la ecuación anterior) por:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

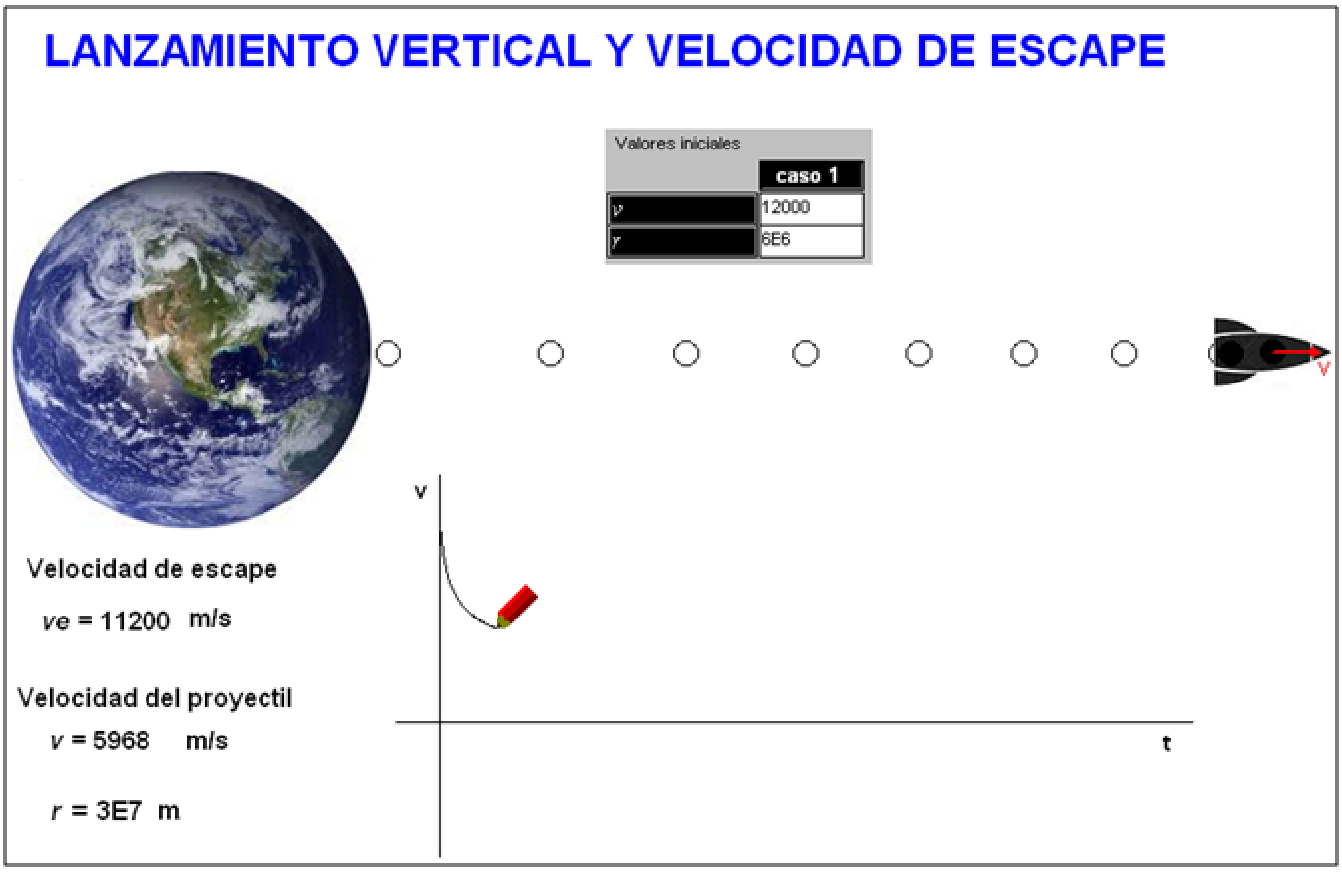
c) Que la energía mecánica sea positiva. $E = -GMm/r + mv^2/2 > 0$

En este caso la energía cinética siempre supera al valor absoluto de la energía potencial. Ello hace que al satélite le sobre energía cinética para escapar de la atracción gravitatoria terrestre ya que para una distancia infinita (energía potencial nula) todavía tendría energía cinética (que coincidiría con el valor de la energía mecánica en cualquier otro punto). Se puede demostrar que en esta situación, el satélite describiría una trayectoria abierta en forma de hipérbola. Para un satélite interplanetario, por ejemplo, se requerirá una energía mecánica positiva. Así ocurrió, con el vehículo espacial Pioneer 10, al cual se le comunicó una energía cinética inicial suficiente como para que, tras su lanzamiento el 3 de marzo de 1972, pudiera escapar de nuestro sistema solar. Dicho vehículo atravesó la órbita de Plutón el 14 de junio de 1983. Las últimas señales del Pioneer se recibieron a comienzos de los años 2000 En la actualidad se encuentra ya muy lejos de nuestro sistema solar, viajando hacia la estrella Aldebarán.

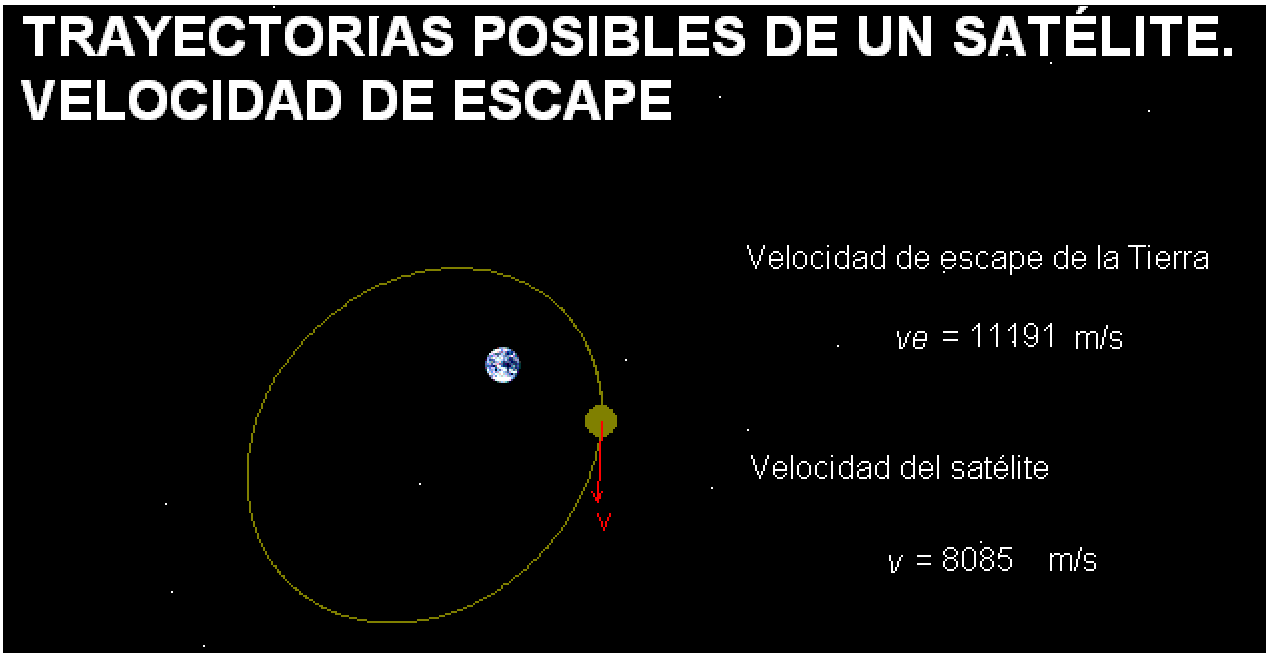
Refuerzo:

Para reforzar algunos de los conceptos involucrados en este problema hemos creado dos animaciones *Modellus*.

En la primera de ellas, se simula el movimiento de un cohete lanzado desde la Tierra en dirección vertical y ascendente. Despreciando la influencia (considerable) del rozamiento con la atmósfera, en la pantalla se simula su movimiento, se va representando paulatinamente la gráfica de la evolución de su velocidad y se calculan en cada instante los valores de ésta y de la posición (obtenida respecto del centro de la Tierra). La imagen adjunta corresponde a un instante posterior a cuando el cohete fue lanzado con una velocidad superior a la velocidad de escape (en este caso 12000m/s). Si se deja correr la animación durante más tiempo el cohete lógicamente desaparece por la parte derecha de la pantalla, y observando la gráfica de la velocidad, podemos constatar que ésta, aunque nunca deja de descender, tampoco va a llegar nunca a anularse. Entrando en la ventana de las condiciones iniciales se puede probar cualquier otro valor de la velocidad de lanzamiento. Siempre que sea inferior a la velocidad de escape, la velocidad sí que pasa por el valor cero y, desde entonces, continúa tomando valores cada vez más negativos, mientras el cohete regresa cada vez más rápido hacia la Tierra.



En la segunda animación se representan animadamente diferentes trayectorias que puede tener un satélite impulsado en dirección “horizontal” desde una cierta altura y se proporciona en todo instante la velocidad del mismo. La animación muestra tres casos (órbita elíptica con velocidad inicial menor que la velocidad de escape, órbita límite a la velocidad de escape y órbita hiperbólica abierta con velocidad inicial superior a la velocidad de escape. Entrando en la ventana de condiciones iniciales, los estudiantes pueden ampliar el estudio a cualquier otro valor de la velocidad de lanzamiento del satélite.



Las dos animaciones y el programa para hacerlas correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF
http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm