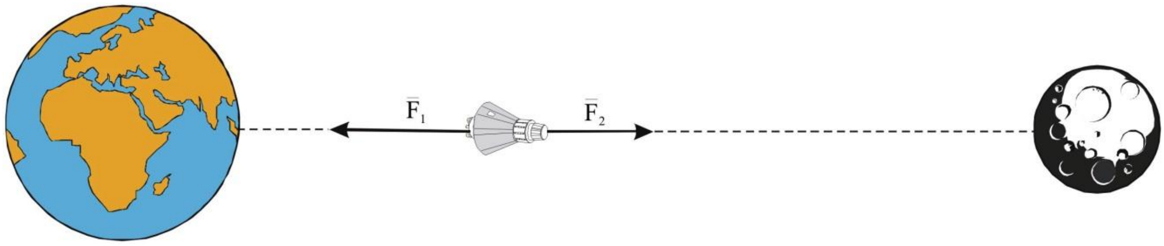
¿En qué punto de la recta que pasa por dos astros la intensidad del campo gravitatorio resultante es 0?

Presentación de la situación problemática, discusión de su posible interés, precisión del problema y análisis cualitativo de la situación.

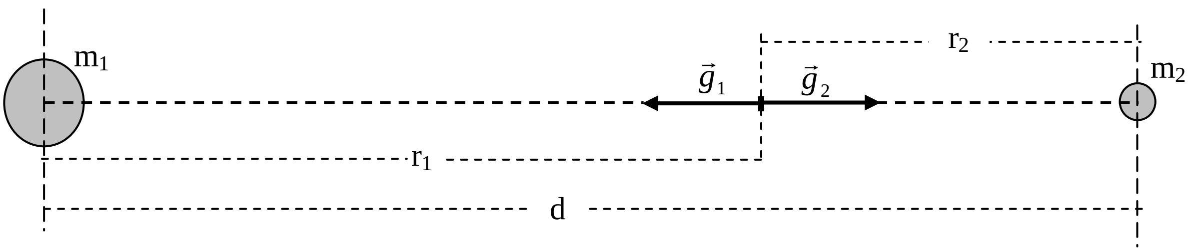
Supongamos un sistema formado por dos astros como, por ejemplo, la Tierra y la Luna, separados entre sí por una cierta distancia. Si una nave se dirige hacia la Luna siguiendo la recta que pasa por ambos astros, resultará del mayor interés conocer en qué punto del trayecto, la fuerza gravitatoria resultante que el sistema ejerce sobre la nave, deja de oponerse a su movimiento y comienza a favorecerlo (análogamente cuando se dirige de la Luna hacia la Tierra). Es evidente que ello se producirá a partir del punto en el que la intensidad del campo gravitatorio sea 0 y que dicho punto deberá estar situado entre ambos astros para que los vectores intensidad tengan sentidos contrarios y su suma pueda valer 0.



El problema planteado tiene que ver, pues, con algo más general, cómo es el aprovechamiento de los campos gravitatorios en el movimiento de naves y sondas espaciales.

Nos vamos a centrar en el caso de dos astros de masas m_1 y m_2 separados por una gran distancia "d" y vamos a suponer que ambos se pueden considerar como masas puntuales. Si pretendemos calcular magnitudes, tales como fuerza, campo, etc., en el exterior de ellos, esta suposición sería totalmente exacta cuando los dos astros fueran perfectamente esféricos y, además, su masa se distribuyera homogéneamente dentro de esas esferas (o de forma totalmente simétrica con respecto al centro). Si se cumplen estos requisitos, al calcular dichas magnitudes se obtendrá el resultado exacto considerando a los astros como masas puntuales situadas en el centro de dichas esferas. Obviamente, los cuerpos celestes reales no son exactamente así, pero la aproximación resulta muy razonable, porque muchos de ellos sí tienen una forma cercana a la esfera y habitualmente su masa se distribuye de forma bastante regular y con tendencia a ser simétrica con respecto al centro.

Así pues, aceptando esta aproximación, vamos a calcular a qué distancia r_1 de m_1 el campo gravitatorio de dicho sistema es nulo.



Posibles estrategias de resolución

Cabe pensar que r_1 dependa de la distancia d, así como de los valores de m_1 y de m_2:

$$r_1 = f\,(m_1, m_2, d)$$

Y más concretamente que: cuanto mayor sea m_1 y/o menor sea m_2 tanto mayor será r_1; cuanto mayor sea d, mayor será también r_1. También podemos pensar en algunos casos límite evidentes, como, por ejemplo: que si m_2 tiende a 0, r_1 tenderá a d; o que si las dos masas son iguales ($m_1 = m_2$), entonces será $r_1 = d/2$, etc.

Sabemos que en el caso del campo gravitatorio creado por una masa m puntual (o que pueda considerarse como tal), la intensidad del campo en un punto del mismo es una magnitud vectorial cuyo módulo viene dado por $g = Gm/r^2$.

En nuestro caso, la intensidad del campo gravitatorio será $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$. Obviamente, para que la suma de estos dos vectores, que tienen la misma dirección y sentidos contrarios, valga 0, es necesario que sus módulos (g_1 y g_2) sean iguales. Por tanto, una forma de resolver el problema podría ser igualar g_1 con g_2 y a partir de la ecuación obtenida hallar r_1.

Otra posible estrategia puede ser obtener la expresión del potencial como $V = V_1 + V_2$. Dado que la intensidad del campo y el potencial se relacionan mediante: $g = -dV/dr$, y que queremos hallar en qué punto $g = 0$, bastará con derivar la expresión de V respecto de r, igualar a 0 y, finalmente, hallar r_1 a partir de la ecuación obtenida.

Resolución, análisis de los resultados, implicaciones y nuevas perspectivas.

Siguiendo la primera de las estrategias enunciadas:

$g_1 = g_2 \rightarrow \frac{Gm_1}{r_1^2} = \frac{Gm_2}{r_2^2} \rightarrow \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$ y teniendo como $r_2 = d - r_1$, nos queda que: $\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{(d - r_1)^2}$

De la expresión anterior es fácil obtener que:

$$r_1 = \frac{d}{1 + \sqrt{m_2 / m_1}}$$

Si nos fijamos en el resultado obtenido podemos ver en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo (L en ambos miembros). También que se cumplen nuestras hipótesis de partida ya que, por ejemplo: si m_1 aumenta, r_1 también aumenta; si m_2 tiende a 0, r_1 tiende a d; si $m_1 = m_2$, $r_1 = d/2$, etc.

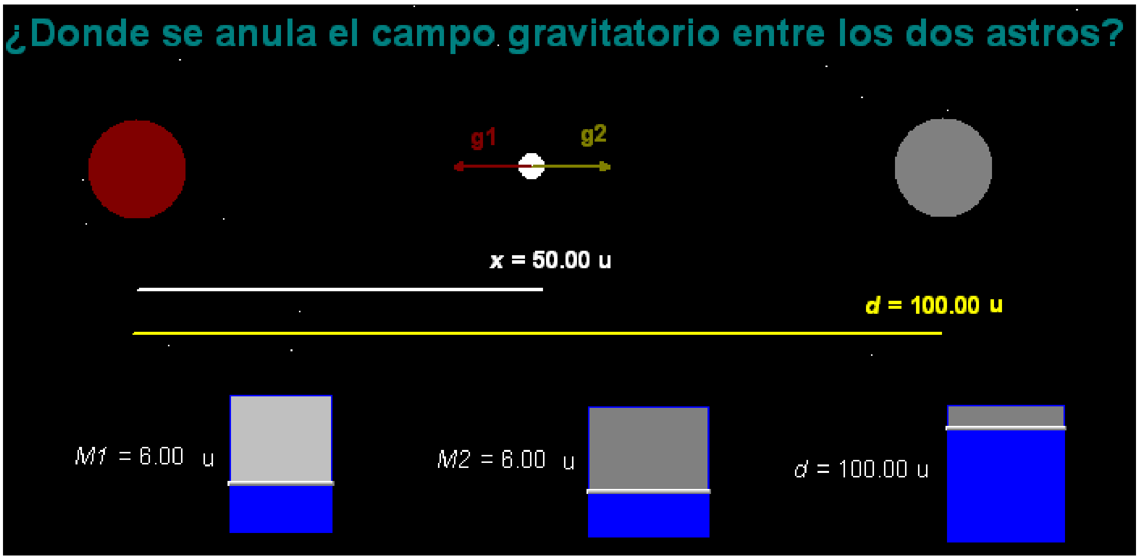
A partir de ese punto (suponiendo el caso de la figura anterior), la fuerza con que m_2 atraería a cualquier objeto de masa m sería mayor que la fuerza con que ese mismo objeto sería atraído por m_1 (recordemos que $F = mg$). El resultado se puede cuantificar sin más que sustituir por valores reales. Por ejemplo, m_1 podría ser la Tierra y m_2 la Luna. En ese caso, sabiendo que la masa de la primera es unas 81 veces la de la segunda y que la distancia media entre ambos astros es de 384000 km, nos quedaría que: $r_1 = 345600$ km del centro de la Tierra.

Finalmente, también podemos plantearnos nuevas interrogantes como, por ejemplo, qué hacer en el caso de sistemas con más de dos astros o cómo aprovechar el campo gravitatorio de distintos planetas cuando queremos enviar una sonda espacial a la periferia de nuestro sistema solar, etc.

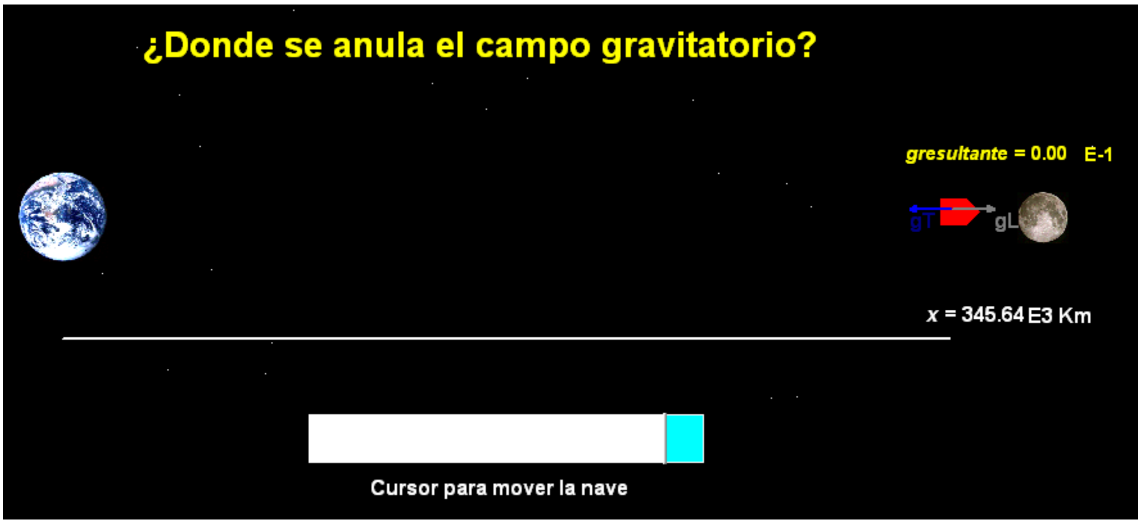
Refuerzo

Como actividad de refuerzo, los alumnos pueden trabajar con dos animaciones *Modellus*, que hemos elaborado, sobre este problema.

En la primera de ellas se muestra a dos astros y una masa testigo, que se ubica entre ambos siempre en el punto donde se equilibran los campos gravitatorios. Utilizando varios controladores manuales, se pueden modificar las masas de cada uno de los dos astros y/o la distancia entre ellos, para ver cómo afectan estos parámetros a la ubicación del punto donde $\mathbf{g}_{res}$=0. Los alumnos pueden poner a prueba sus hipótesis sobre el problema usando estos controladores. También se muestran los vectores que representan a los campos gravitatorios que crea cada astro en el punto donde se sitúa la masa testigo, ya que, aunque ahí se compensan, el valor de cada uno, obviamente, no es el mismo dependiendo de los valores que tengan las masas de los astros y la distancia entre ellos. En esta animación hemos expresado todas las magnitudes en unidades arbitrarias, lo que proporciona números más sencillos de todas las magnitudes.



La segunda animación ilustra directamente el caso particular que hemos resuelto aquí acerca del campo gravitatorio entre la Tierra y la Luna, y utiliza datos reales. Entre la Tierra y la Luna hemos colocado una nave que el usuario puede desplazar mediante un control manual. Sobre dicha nave se ejercen los dos campos gravitatorios y la animación también muestra el valor del campo gravitatorio resultante. El usuario puede desplazar la nave cualquier posición entre la Tierra y la Luna y, en particular, a aquella donde $\mathbf{g}_{res}$=0, como muestra la imagen siguiente.



Las dos animaciones y el programa para hacerlas correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm