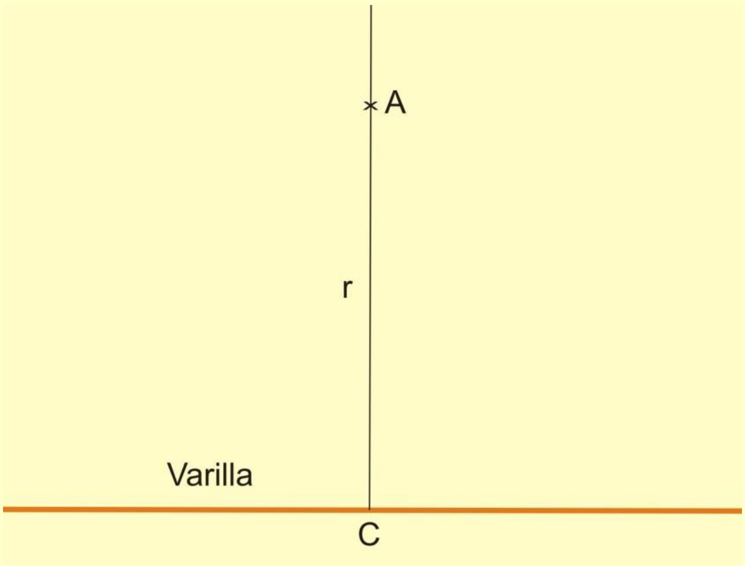
8. Dada una varilla recta de longitud L, cargada con una carga Q (positiva) uniformemente distribuida por la misma, se pide:



Intensidad del campo eléctrico generado por la carga de la barra en un punto A situado en el eje que atraviesa perpendicularmente a la varilla por su centro C.

Supondremos el grosor de la varilla despreciable frente a su longitud y que, por tanto, podemos considerarla lineal. Como la carga Q de la varilla no es puntual, podemos realizar las mismas consideraciones que se hicieron para otras distribuciones continuas de carga y considerarla compuesta por segmentos infinitesimales, de longitud dL, tales que en cada uno de ellos habría una carga dQ que sí podría considerarse como puntual. A continuación, se trataría de hallar la expresión del campo eléctrico $d\vec{E}$ correspondiente a cada dQ (en el punto A considerado) y finalmente obtener $\vec{E}$ como la suma (integral) de todos los $d\vec{E}$.

La densidad lineal de carga será:

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

Con lo que cada carga dQ se podrá expresar como $dQ = \lambda \cdot dL$

En la figura 1 siguiente podemos ver el vector intensidad del campo eléctrico generado en el punto A por uno de tales elementos de carga dQ. Hemos escogido un sistema de coordenadas cartesianas XY con origen en el centro de la varilla. Supondremos que el punto A, en el que deseamos obtener la intensidad del campo eléctrico generado por la varilla, se halla a una distancia “r” del centro de la misma. La distancia entre el elemento dQ considerado y el punto A, se ha simbolizado (como venimos haciendo en problemas anteriores) por “e”, siendo (x , 0) las coordenadas de dicho elemento de carga.

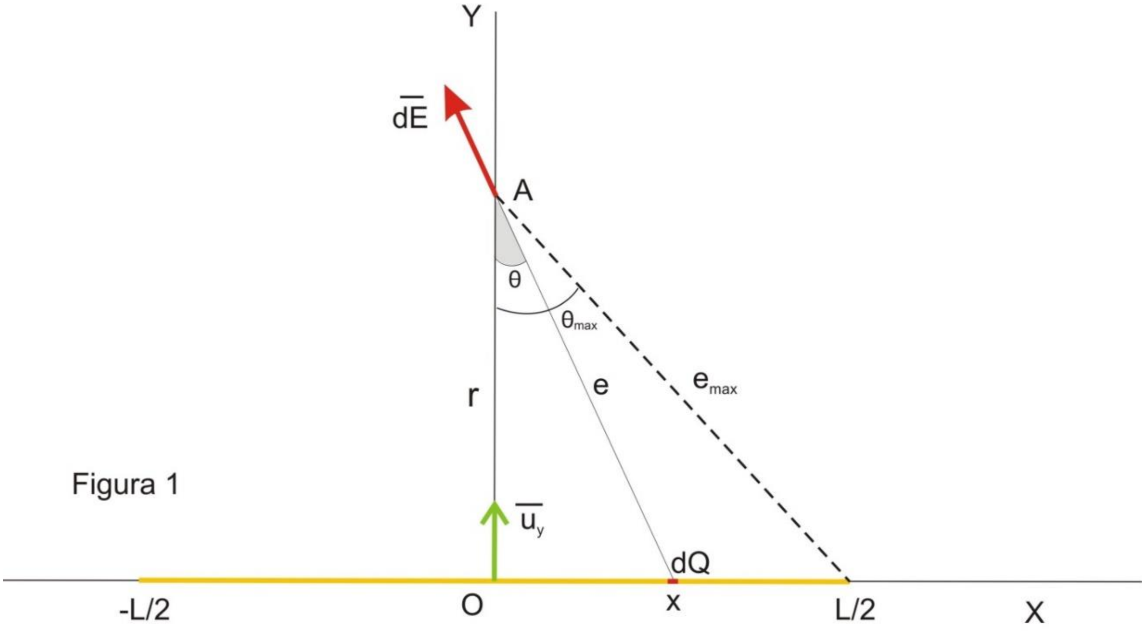


Figura 1

Por la simetría de la figura 1 es fácil darse cuenta de que el vector $\vec{E}$ resultante en el punto A, se encontrará sobre el eje y se orientará hacia arriba, ya que para cualquier dQ situada a la derecha de O, siempre habrá otra igual situada a la izquierda y a la misma distancia de O, de tal forma que si descomponemos cada $d\vec{E}$ en sus vectores componentes cartesianos, los vectores según el eje X se anularán entre sí, mientras que los situados sobre el eje Y tendrán ambos la misma dirección y sentido, tal y como se muestra en la figura 2 siguiente:

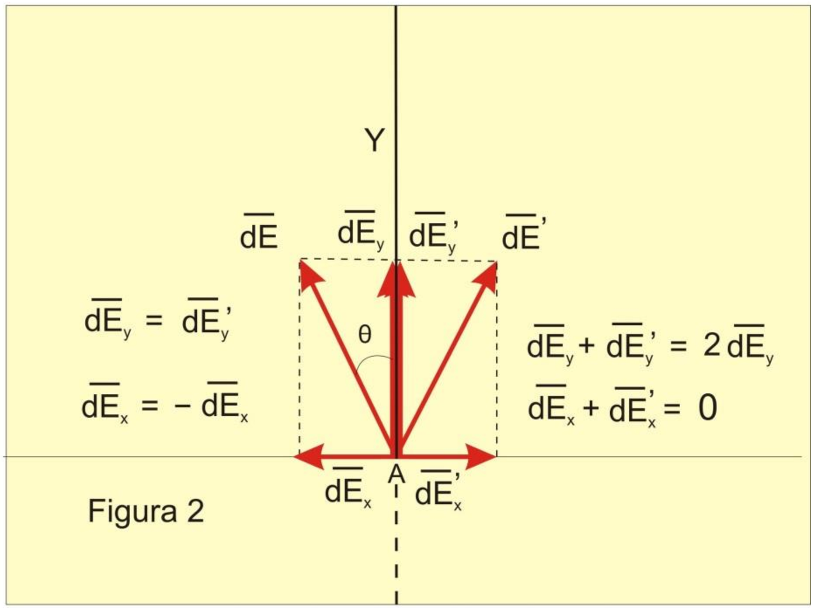


Figura 2

Por tanto: $\vec{E} = \int d\vec{E}_y$

Sugerid un posible procedimiento para obtener la intensidad del campo eléctrico en A y llevadlo a cabo.

Hemos visto anteriormente que $\vec{E} = \int d\vec{E}_y = \int dE_y \cdot \vec{u}_y$

Podemos resolver el problema si somos capaces de calcular esta integral.

Para ello, de la figura 2, podemos ver que: dEy = dE·cosθ

Sustituyendo dE en la igualdad anterior, queda: $dE_y = K \cdot \frac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta$

Con lo que: $\vec{E} = \int d\vec{E}_y = \int K \cdot \frac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_y$ (1)

En la integral anterior, existen tres variables (Q, e y θ), por lo que *hay que buscar una forma de reducir todo a una sola variable*.

Podemos expresar dQ en función de la densidad de carga lineal (que es constante): dQ = λ·dL o, lo que es equivalente (dado que la varilla se halla sobre el eje X): dQ = λ·dx

Por otra parte, en la figura 1, vemos que x = r·tgθ → $dx = r \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot d\theta$

También vemos que e = r/cosθ → $e^2 = (r/\cos\theta)^2$

Teniendo todo esto en cuenta, podemos ya resolver la integral de la ecuación (1) poniendo todo en función del ángulo θ. Además, para facilitar el cálculo, en lugar de considerar toda la longitud de la barra, nos limitaremos a integrar desde su centro hasta L/2 y multiplicar por 2 el resultado. Con todo ello:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}_y = \int K \cdot \frac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{E} = 2 \cdot \int_0^{\theta_{\max}} K \cdot \frac{\lambda \cdot (r/\cos^2\theta)}{r^2/\cos^2\theta} \cdot \cos\theta \cdot d\theta \cdot \vec{u}_y$$

En la ecuación anterior, θ_{max} corresponde al valor de θ cuando dQ coincide con el extremo derecho de la barra.

Simplificando y sacando lo que es constante fuera de la integral, obtenemos:

$$\vec{E} = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} \int_0^{\theta_{\max}} \cos\theta \cdot d\theta \cdot \vec{u}_y = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} \left[sen\theta\right]_0^{\theta_{\max}} \cdot \vec{u}_y$$

De la figura 1 vemos que: $sen\theta_{\max} = \frac{L/2}{e_{\max}} = \frac{L/2}{\sqrt{(L^2/4) + r^2}}$

con lo que:

$$\vec{E} = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} (sen\theta_{\max} - sen0) \cdot \vec{u}_y = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} \cdot \left(\frac{L/2}{\sqrt{(L^2/4) + r^2}} \right) \cdot \vec{u}_y$$

o, lo que es equivalente:

$$\vec{E} = \frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4 \cdot (r/L)^2}} \right) \cdot \vec{u}_y \qquad (1)$$

Sustituyendo λ en el resultado anterior, obtenemos finalmente que:

$$\vec{E} = \frac{2 \cdot K \cdot Q}{r \cdot L} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4 \cdot (r/L)^2}} \right) \cdot \vec{u}_y \qquad (2)$$

El resultado obtenido (en cualquiera de las dos formas en que lo hemos expresado), es, como se puede comprobar, dimensionalmente homogéneo (unidades de N/C en ambos lados de la ecuación). También nos permite ver qué sucedería en algunos casos particulares de especial interés:

Obtened el campo generado por la varilla para el caso en que el punto A esté muy próximo a ella, es decir, para $r << L$.

Para hacerlo, basta considerar que, en ese caso, el término $4 \cdot (r/L)^2$ se podrá despreciar frente a 1. Si hacemos esto en la ecuación (1), el resultado se transforma en:

$$\vec{E} = \frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{r} \cdot \vec{u}_y \qquad (3)$$

En muchos casos, se suele expresar la constante K como $K = 1/4\pi\varepsilon_0$, de manera que lo más habitual es encontrar este último resultado en la forma:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \cdot \vec{u}_y \qquad (4)$$

El resultado expresado mediante la ecuación (4) es el que figura en la mayor parte de los textos. El vector unitario puede estar representado mediante otro símbolo, pero lo importante es resaltar que el vector campo eléctrico en la situación considerada, es perpendicular a la varilla.

Sugerid otras formas de obtener el resultado (4) anterior y llevadlas a cabo

Vale la pena darse cuenta de que hubiésemos llegado al mismo resultado si, directamente, en la ecuación (2) hubiésemos hecho L = ∞, puesto que una separación infinitamente pequeña entre el punto A y la varilla, equivale en la práctica a una varilla de longitud infinita. En efecto, sustituyendo L por ∞ en la ecuación (1):

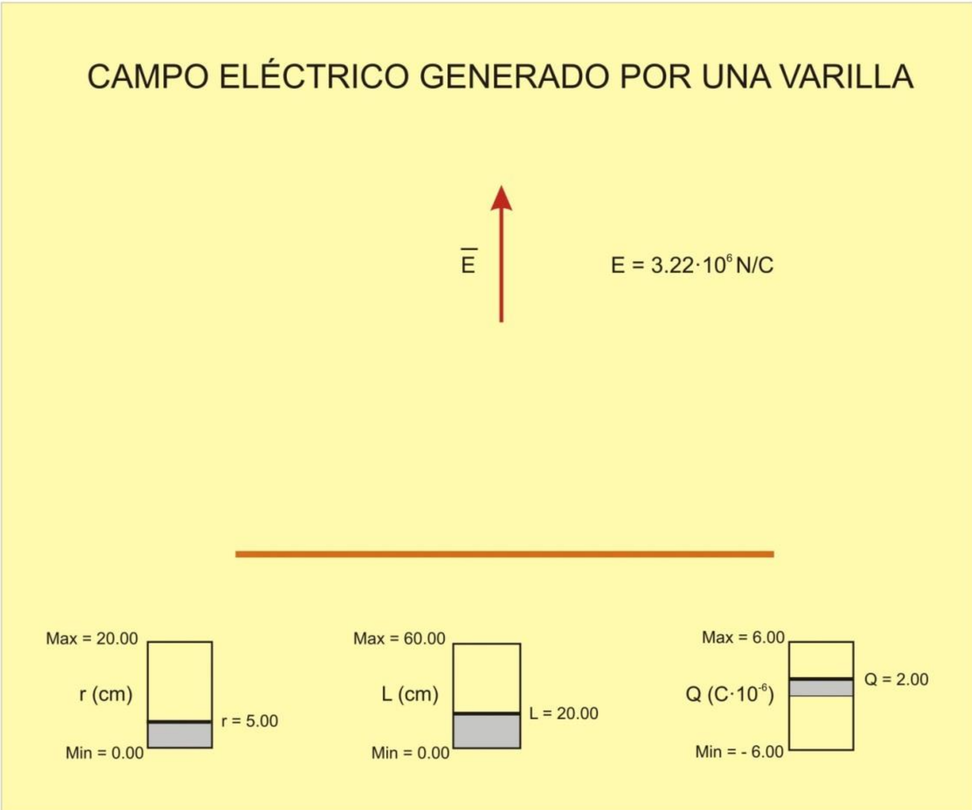
$$\vec{E} = \frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+0}} \right) \cdot \vec{u}_y = \frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{r} \cdot \vec{u}_y$$

Otra forma de llegar a este mismo resultado es cambiando los límites de integración, de forma que θ_{max} sería ahora $\pi/2$, con lo cual, el cálculo se modificaría de la siguiente forma:

$$\vec{E} = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} (sen \frac{\pi}{2} - sen\ 0) \cdot \vec{u}_y = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} \cdot \vec{u}_y$$

Y sustituyendo ahora K, obtenemos: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r} \cdot \vec{u}_y$

Para este problema también se puede usar una animación informática *Modellus*, que calcula y representa en campo eléctrico generado por la varilla cargada. Se pueden modificar todos los parámetros (incluyendo la posibilidad de que la carga de la varilla sea positiva o negativa.



La animación está disponible en la web de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).