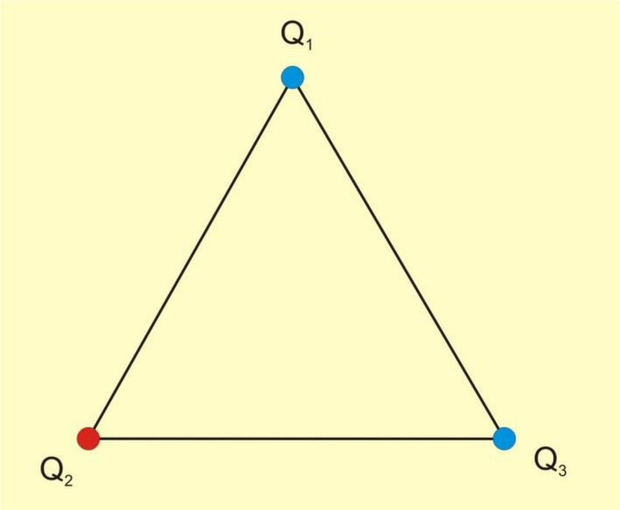
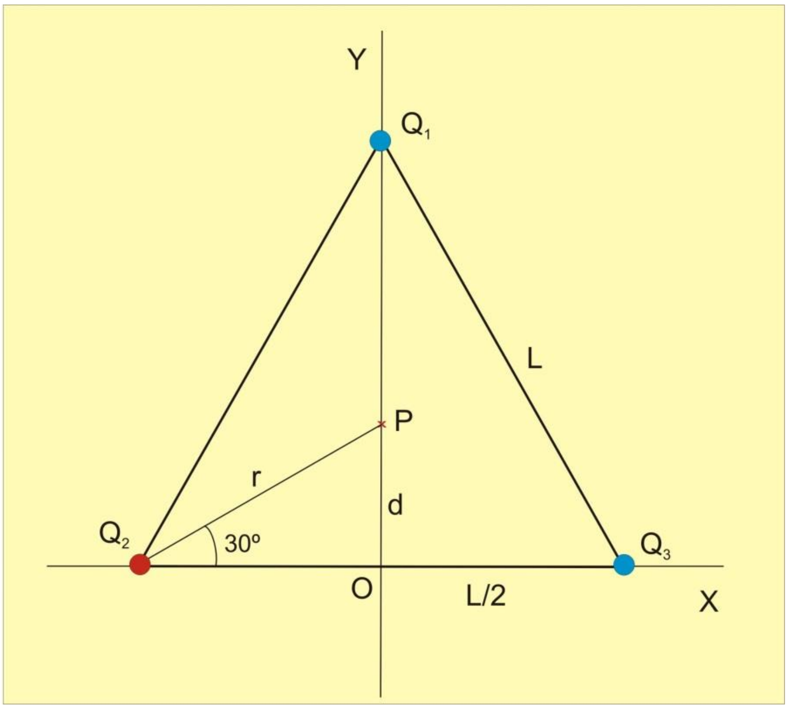
17. Tres cargas puntuales $Q_1 = -2\cdot10^{-5}$ C, $Q_2 = 10^{-5}$ C y $Q_3 = -10^{-5}$ C se hallan en los vértices de un triángulo equilátero de 2 m de lado. Se pide:



a) Vector intensidad del campo eléctrico y potencial en el centro del triángulo.
b) Energía potencial del sistema formado por las tres cargas.
c) Energía potencial de una carga $q = 10^{-8}$ C si se colocase en el centro del triángulo.

Para resolver el problema nos conviene, en primer lugar, *localizar el centro de la figura* que corresponderá al punto en donde se cortan las bisectrices (o baricentro). Si llamamos r a la distancia del centro de la figura a cualquiera de los vértices, d a la distancia entre dicho centro y el punto medio de cualquiera de los lados y L a la longitud del lado, tendremos:

Figura 1



Podemos expresar ahora, tanto r como d (en principio, desconocidas), en función de la longitud L del lado del triángulo. En efecto:

$$\cos 30^{\circ} = \frac{L/2}{r} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{L}{2r} \rightarrow r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$sen 30^{\circ} = \frac{d}{r} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{L/\sqrt{3}} \rightarrow d = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

La altura del triángulo formado por las tres cargas se puede obtener aplicando el teorema de Pitágoras o, simplemente, sumando r con d. Si designamos a dicha altura como H, siguiendo la segunda estrategia propuesta, tendremos que:

$$H = r + d = \frac{L}{\sqrt{3}} + \frac{L}{2\sqrt{3}} \rightarrow H = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

En la figura 1 anterior, hemos incluido también un sistema de referencia sencillo, con origen en el punto medio de la base del triángulo. En dicho sistema de referencia, las posiciones de las tres cargas y la del punto P (baricentro) en donde queremos obtener el campo eléctrico y el potencial son:

Carga Q_1: $\left(0\,,\,\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)$

Carga Q_2: $\left(-\frac{L}{2}\,,\,0\right)$

Carga Q_3: $\left(\frac{L}{2}\,,\,0\right)$

Punto P: $\left(0\,,\,\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$

a) Determinación de la intensidad del campo eléctrico y el potencial

Plantead hipótesis acerca de los factores de los que cabe esperar que dependa el campo eléctrico buscado y la forma de dicha dependencia.

Cabe plantear que el campo eléctrico resultante que buscamos obtener en el baricentro del triángulo (tanto su módulo, $|\vec{E}|$, como su orientación) dependa de la longitud, L, del lado de dicho triángulo (ya que L determina, a su vez, las posiciones que ocupan las tres cargas y la del punto P donde queremos obtener el campo eléctrico), de los valores absolutos y de los signos (positivo o negativo) que tengan las cargas, Q_1, Q_2, Q_3, y también de la constante eléctrica del medio, K.

$$\vec{E} = f\,(L, Q_1, Q_2, Q_3, K)$$

En el centro del triángulo (como en cualquier otro punto) los vectores que proporcionan el campo eléctrico de cada una de las tres cargas $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ podrán tener distintas longitudes (dependiendo de su módulo) y distintas orientaciones (dependiendo de que cada una de las cargas que los generan sean positivas o negativas). No podemos, por ello, prever cómo influirá cada carga por separado, pero sí cabe plantear algunos casos límite y algunas hipótesis que las involucre de manera conjunta. Concretamente:

1ª) ¿Qué pasaría con la intensidad del campo eléctrico resultante si las tres cargas fueran idénticas?

Si las tres cargas eléctricas tuviesen el mismo valor y el mismo signo, los tres campos eléctricos que producen en el centro del triángulo equilátero que forman se contrarrestarían y, en consecuencia, el campo eléctrico resultante, tal y como se muestra en la figura 2 siguiente, sería $\vec{E} = 0$.

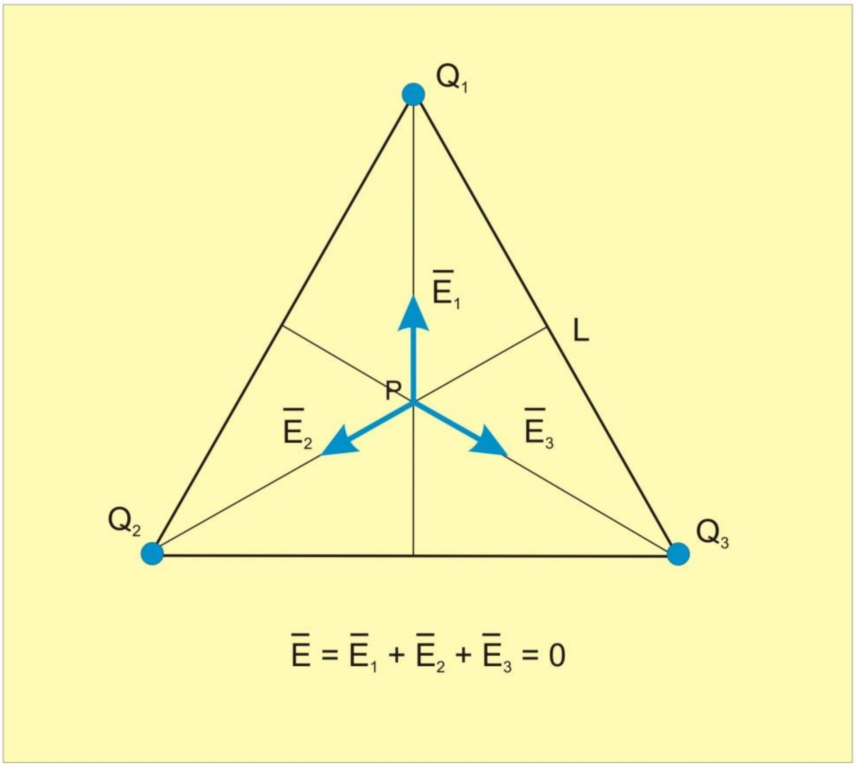


Figura 2

2ª) ¿Qué pasaría con la intensidad del campo eléctrico resultante si dos de las cargas fuesen idénticas?

Si dos de las tres cargas eléctricas, por ejemplo, Q_2 y Q_3, tuviesen el mismo valor y el mismo signo, el vector campo eléctrico resultante buscado, $\vec{E}$, estaría en la mediana del triángulo que pasa por la otra carga, Q_1 (independientemente del signo y valor de esta), porque, en ese caso, tanto la suma de los campos $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$, como el campo $\vec{E}_1$ creado por la carga Q_1, también lo estarían, tal y como se puede apreciar en la figura 3 siguiente, en la que, arbitrariamente, se ha supuesto que Q_2 y Q_3 son cargas positivas iguales, mientras que Q_1 es negativa y de mayor valor absoluto.

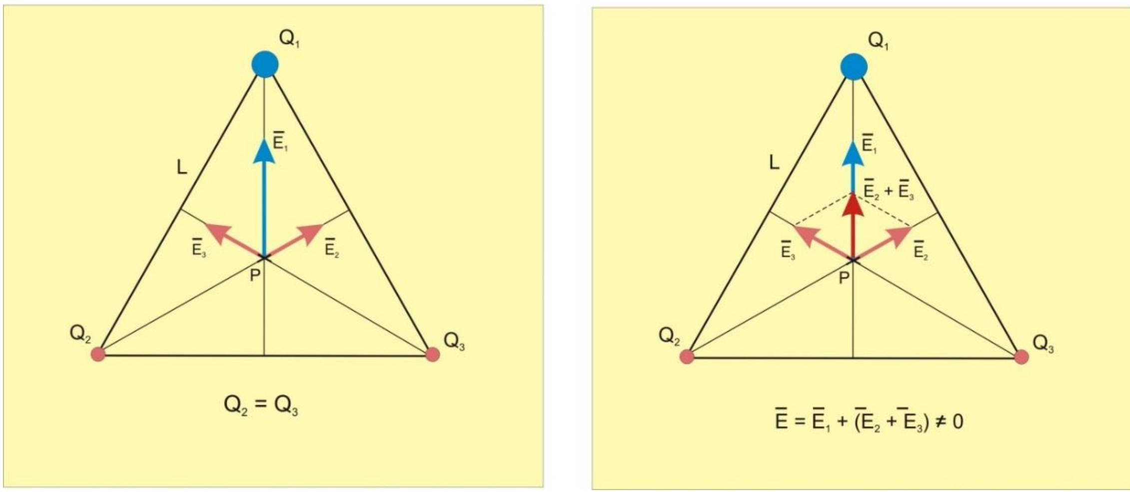


Figura 3

3ª) ¿Qué pasaría con la intensidad del campo eléctrico resultante si todas las cargas aumentasen en valor absoluto?

Para un determinado valor y signo de cada una de las cargas (sean estos los que sean, excepto el caso en el que sean todos iguales y se contrarresten, como ocurre en la figura 2), cabe esperar que si se incrementan (en valor absoluto) las intensidades de las tres cargas, también se incremente el módulo del campo eléctrico resultante. Bajo estas condiciones, dicho campo resultante mantendrá la misma orientación. Por tanto, multiplicar por un determinado factor el valor absoluto cada una de las cargas, ha de implicar también multiplicar los módulos de los campos eléctricos correspondientes que generan en el punto P, y, como consecuencia de ello, también debería aumentar el módulo del campo resultante.

4ª) ¿Cómo influirían en la intensidad del campo eléctrico resultante, hipotéticos cambios en el valor de la longitud L? ¿Y de la constante K?

Para un determinado valor y signo de cada una de las cargas, si la longitud L de cada lado del triángulo equilátero que forman aumentase, la intensidad del campo eléctrico buscado $|\vec{E}|$ debería disminuir, porque, en ese caso, la distancia, r, entre el baricentro P y cada una de las cargas también aumentaría. Evidentemente, en el caso límite en el que $L \rightarrow \infty$ el campo eléctrico buscado tendería a anularse ($E \rightarrow 0$).

Finalmente, cuanto mayor pueda ser la constante K del medio, mayor deberá ser (a igualdad del resto de factores) la intensidad del campo eléctrico buscado. Si, por ejemplo, K fuera nula, el campo eléctrico también lo sería ($\vec{E} = 0$), ya que, en ese caso, simplemente, no habría fuerza eléctrica alguna sobre ninguna carga de prueba que colocásemos en ese medio.

Elaborad posibles estrategias y desarrollar alguna para obtener el campo eléctrico buscado

Sabemos que la intensidad del campo eléctrico creado por una carga puntual Q a una distancia r de la misma viene dada, por la expresión:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario que siempre tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{r}$ que va desde la carga generadora del campo hasta el punto donde se desea calcular su intensidad.

La intensidad del campo eléctrico en el baricentro P del triángulo será la suma de los vectores intensidad de campo $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ correspondientes a las cargas Q_1, Q_2 y Q_3, respectivamente. Por tanto, para resolver el problema obtendremos primero cada uno de esos vectores. En la figura 4 siguiente se han representado de nuevo, junto con los vectores unitarios correspondientes:

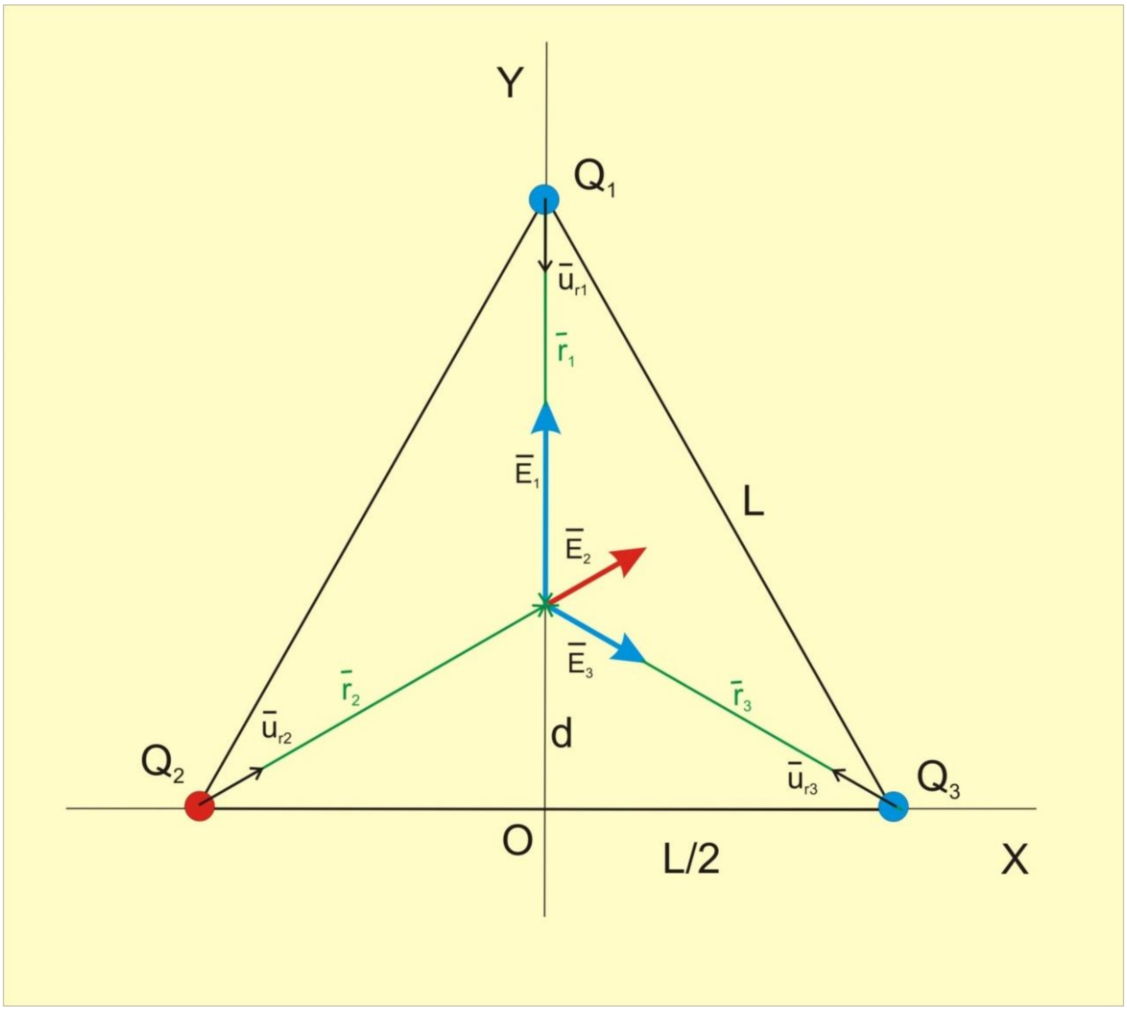


Figura 4

En la figura 4 anterior, se cumple que:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = K \cdot \frac{Q_1}{(L/\sqrt{3})^2} \cdot (0\,,-1) \rightarrow \vec{E}_1 = \left(0\,, -K \cdot \frac{3 \cdot Q_1}{L^2}\right)$$

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = K \cdot \frac{Q_2}{(L/\sqrt{3})^2} \cdot \vec{u}_{r2}$$

La expresión de $\vec{u}_{r2}$ en función de sus componentes escalares no es inmediata (como ocurría con $\vec{u}_{r1}$ en el caso anterior). Para obtenerla, dividiremos el vector $\vec{r}_2$ por su módulo r_2. El vector $\vec{r}_2$ podemos hallarlo sin más que restar las coordenadas de su origen a las coordenadas de su extremo, de modo que:

$$\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(0\,,L/2\sqrt{3})-(-L/2\,,0)}{L/\sqrt{3}} \rightarrow \vec{u}_{r2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{1}{2}\right)$$

Sustituyendo ahora en $\vec{E}_2$:

$$\vec{E}_2 = K\cdot\frac{Q_2}{(L/\sqrt{3})^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{E}_2 = \left(K\cdot\frac{3\sqrt{3}\cdot Q_2}{2L^2}\,,\ K\cdot\frac{3\cdot Q_2}{2L^2}\right)$$

Finalmente: $\vec{E}_3 = K\cdot\dfrac{Q_3}{(L/\sqrt{3})^2}\cdot\vec{u}_{r3}$

Conocido $\vec{u}_{r2}$, resulta muy sencillo, hallar $\vec{u}_{r3}$. En efecto, basta observar la figura 4 para darse cuenta de que la componente según el eje Y de $\vec{u}_{r3}$ es la misma que la de $\vec{u}_{r2}$, mientras que las componentes según el eje X son iguales, pero de distinto signo. Teniendo esto en cuenta, podemos escribir que:

$$\vec{E}_3 = \left(-K\cdot\frac{3\sqrt{3}\cdot Q_3}{2L^2}\,,\ K\cdot\frac{3\cdot Q_3}{2L^2}\right)$$

Sumando ahora los tres vectores: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

$$\vec{E} = \left(0\,,-K\cdot\frac{3\cdot Q_1}{L^2}\right) + \left(K\cdot\frac{3\sqrt{3}\cdot Q_2}{2L^2}\,,\ K\cdot\frac{3\cdot Q_2}{2L^2}\right) + \left(-K\cdot\frac{3\sqrt{3}\cdot Q_3}{2L^2}\,,\ K\cdot\frac{3\cdot Q_3}{2L^2}\right)$$

De donde obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{3K}{L^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(Q_2-Q_3)\quad,\quad(-Q_1+\frac{Q_2}{2}+\frac{Q_3}{2}\right) \qquad (1)$$

El módulo del vector anterior viene dado por: $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$, lo que da lugar a:

$$|\vec{E}| = \frac{3\cdot K}{L^2}\cdot\sqrt{Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2-Q_1Q_2-Q_1Q_3-Q_2Q_3} \qquad (2)$$

Sustituyendo valores numéricos y operando en (1), obtenemos: $\vec{E}$ = (1'17·10^5 , 1'35·10^5) N/C

Haciendo lo mismo en (2): $|\vec{E}|$ = 1'79·10^5 N/C.

Obtened gráficamente el vector intensidad del campo eléctrico resultante en el punto P

Basta con trasladar los vectores $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ sin cambiar nada de ellos (ni módulo, ni dirección ni sentido) a continuación del vector $\vec{E}_1$. El vector suma vendrá representado por una flecha desde el origen de $\vec{E}_1$ hasta el extremo de $\vec{E}_3$, tal y como se muestra en la figura 5 siguiente:

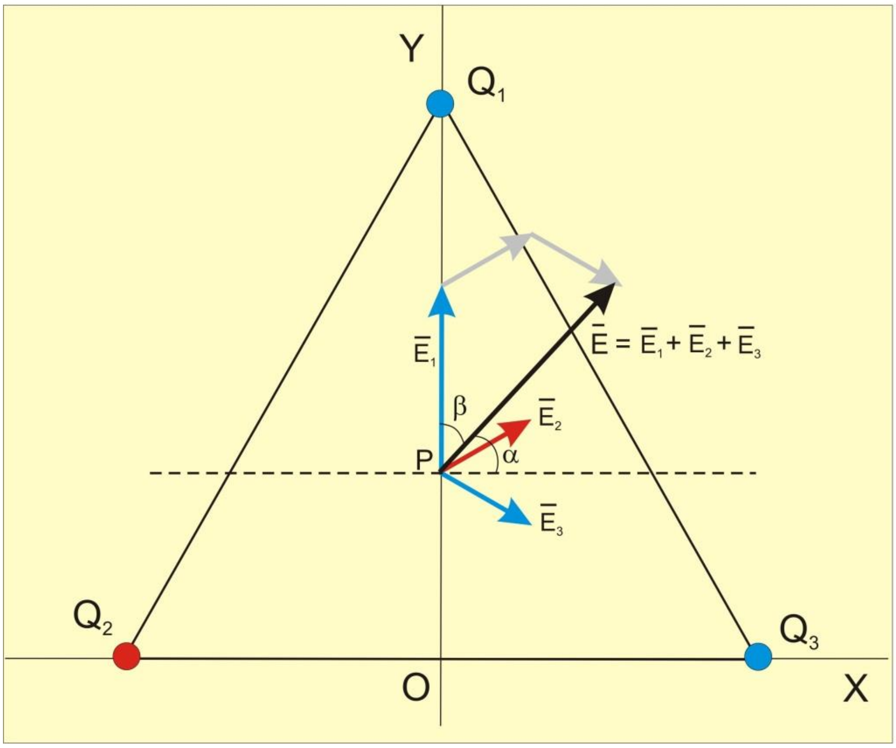


Figura 5

En cuanto a la dirección y sentido del vector, estos, vienen dados por los ángulos directores o ángulos que forma el vector con cada uno de los semiejes positivos:

cos α = 1'17/1'79 = 0'65 $\rightarrow$ α = arccos 0'65 = 49º
cos β = 1'35/1'79 = 0'75 $\rightarrow$ β = arccos 0'75 = 41º

El resultado obtenido se puede leer diciendo que si en el centro del triángulo se colocase una hipotética carga puntual positiva (+ 1 C), sobre ella el campo ejercería una fuerza de $1'79\cdot 10^5$ N en la misma dirección y sentido que el vector $\vec{E}$.

Analizad el resultado literal obtenido con el fin de constatar si se cumplen o no las hipótesis elaboradas al comienzo

Como puede observarse, el resultado (2) es homogéneo (unidades de N/C en ambos lados) y su expresión es acorde, en la forma, con la de un campo eléctrico, ya que es proporcional a una cierta suma de las cargas y a la constante K, e inversamente proporcional al cuadrado de la variable longitudinal, L.

Podemos fijarnos en la expresión del término en donde aparecen las cargas (dentro de la raíz cuadrada), y comprobar que mediante dicha expresión las tres cargas eléctricas influyen en el resultado de un modo completamente simétrico. Esto es lógico dada la simetría que muestran en el espacio las tres cargas con respecto al punto central en el que estamos calculando el campo que generan.

Conviene también fijarse en los signos de los seis sumandos que involucran a las cargas eléctricas. Lógicamente estos signos son los adecuados para que cuando se sustituyan los valores de cada carga (cada una con su signo), se obtenga un resultado correcto, que ha de tener en cuenta que al calcular el campo se suman tres vectores, cuyas orientaciones dependen precisamente que esos signos que tengan las cargas.

De manera más concreta, podemos ver ahora que se cumplen las diferentes hipótesis que habíamos formulado y los casos límite.

En efecto, el resultado constata que cuanto mayor sea L y/o cuanto menor sea K, menor resulta el módulo del campo eléctrico y viceversa, cumpliéndose los casos límite que habíamos planteado para estas dos variables (por ejemplo, para L → ∞, o para K → 0 se cumple que E → 0).

En cuanto a los casos que habíamos planteado sobre algunos valores posibles de las cargas, podemos empezar comprobando que si las tres son iguales (mismo valor y mismo signo), es decir, si $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$, se obtiene, como cabía esperar, que:

$$|\vec{E}| = \frac{3 \cdot K}{L^2}\sqrt{Q^2 + Q^2 + Q^2 - Q \cdot Q - Q \cdot Q - Q \cdot Q} = 0$$

En segundo lugar, podemos hacer que dos cargas sean iguales, por ejemplo, $Q_2 = Q_3 = Q$ y sustituir esta condición en la ecuación (1):

$$\vec{E} = \frac{3K}{L^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (Q_2 - Q_3) \quad , \quad (-Q_1 + \frac{Q_2}{2} + \frac{Q_3}{2} \right)$$

Si en el resultado anterior Hacemos $Q_2 = Q_3 = Q$, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{3K}{L^2} \cdot (0\,, Q - Q_1) \rightarrow \vec{E} = \left[0\,, K \cdot \frac{3}{L^2}(Q - Q_1) \right]$$

Es decir, se constata que en este caso el campo resultante es, efectivamente, vertical, lo que significa que está en la línea mediana del triángulo que pasa por la carga Q_1, tal como habíamos planteado en una de las hipótesis (ved figura 3).

Finalmente, podemos también multiplicar a todas las cargas por un determinado factor N (sin alterar sus signos). Entonces se obtiene:

$$|\vec{E}|' = \frac{3 \cdot K}{L^2}\sqrt{(N \cdot Q_1)^2 + (N \cdot Q_2)^2 + (N \cdot Q_3)^2 - N^2 Q_1 \cdot Q_2 - N^2 Q_1 \cdot Q_3 - N^2 Q_2 \cdot Q_3}$$

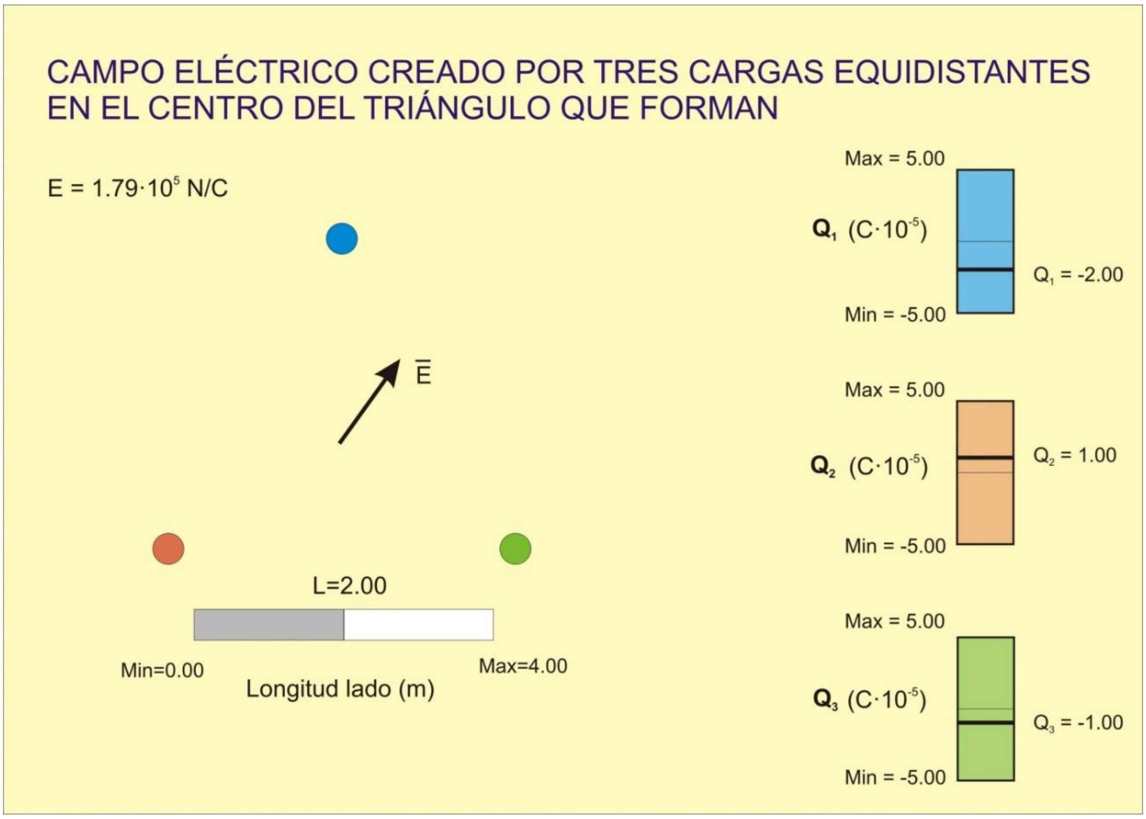
Es decir, se obtiene:

$$|\vec{E}|' = N \cdot |\vec{E}|$$

El campo eléctrico resultante se multiplica por ese mismo factor N.

Los desarrollos anteriores se pueden reforzar y visualizar con una animación informática *Modellus* interactiva que hemos creado específicamente con este propósito. En ella, los usuarios pueden modificar cada uno de los parámetros y comprobar cómo afecta cada modificación al resultado, tanto del módulo del campo eléctrico, como del vector que lo representa en el centro del triángulo que forman las cargas. De este modo, se pueden poner a prueba todas las hipótesis y casos límite que hemos visto anteriormente, se pueden estudiar otras situaciones (por ejemplo, qué ocurre si cambia el signo de una o de varias cargas, etc.), se puede analizar con detalle el resultado, evaluar otros órdenes de magnitud, etc.

En la imagen siguiente podemos ver el aspecto que presenta la pantalla cuando los valores de las magnitudes coinciden con los que se han propuesto en el enunciado. La animación y el programa para hacerla correr en cualquier ordenador están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm.



Podemos pasar ahora a determinar el potencial eléctrico V también en el centro P del triángulo formado por las tres cargas.

Al igual que el campo, el potencial eléctrico se obtiene sumando los potenciales que crean cada una de las cargas en el punto considerado, pero a diferencia del campo, el potencial es una magnitud escalar, en lugar de vectorial, de modo que su suma es una simple suma algebraica de los valores de los potenciales creados por cada carga Q, cuya expresión es:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

Plantead hipótesis sobre el valor del potencial eléctrico en el centro del triángulo

Teniendo en cuenta la expresión anterior, es evidente que el potencial eléctrico total (obsérvese que decimos “total” y no “resultante”, porque se trata ahora simplemente de sumar números, no de componer vectores) en el baricentro del triángulo (punto P) dependa de la longitud, L, de dicho triángulo (que determina, a su vez, las posiciones que ocupan las tres cargas y la del punto P), de los valores de cargas, Q_1, Q_2, Q_3, y de la constante eléctrica del medio, K.

$$V = f(L, Q_1, Q_2, Q_3, K)$$

A partir de aquí, es fácil darse cuenta de que cuanto mayor sea cualquiera de las cargas (atención, no en valor absoluto, sino simplemente mayor), mayor deberá ser también el valor del potencial eléctrico V.

Analizar lo que ocurrirá al modificar la longitud L del triángulo que forman las cargas, no es una tarea sencilla, puesto que el potencial creado por una carga será positivo o negativo dependiendo del signo que tenga dicha carga. Consecuentemente, aunque al aumentar L disminuye el valor absoluto del potencial generado por cualquiera de las cargas en el centro del triángulo (la distancia r aumenta), esa disminución del valor absoluto del potencial implicará también una disminución del valor del potencial cuando la carga que lo genera sea positiva, pero implicará un aumento del valor de V cuando dicha carga sea negativa.

Lo mismo puede decirse de la constante del medio. Una modificación de su valor implica una modificación en el mismo sentido del valor absoluto del potencial eléctrico, pero para cada carga esa modificación puede suponer un aumento del valor de V o una disminución del mismo según cual sea el signo de dicha carga.

Obtened el valor del potencial total en el centro del triángulo

Los potenciales debido a cada una de las cargas son:

$$V_1 = K \cdot \frac{Q_1}{r}$$

$$V_2 = K \cdot \frac{Q_2}{r}$$

$$V_3 = K \cdot \frac{Q_3}{r}$$

Por tanto, el potencial total en P, será:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{Q_1}{r} + K \cdot \frac{Q_2}{r} + K \cdot \frac{Q_3}{r}$$

Si sacamos factor común y tenemos en cuenta que $r = \frac{L}{\sqrt{3}}$, obtenemos finalmente:

$$V = \frac{K \cdot \sqrt{3}}{L} \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

Este resultado es coherente con las consideraciones que realizamos anteriormente con respecto al valor de V. En el caso particular que nos ocupa, $Q_1 = -2\cdot10^{-5}$ C, $Q_2 = 10^{-5}$ C, $Q_3 = -10^{-5}$ C, L = 2 m, se obtiene:

$$V = -\ 1'56\cdot10^5\ \text{V}$$

Hemos de observar que el potencial obtenido en este caso resulta negativo porque predomina la contribución al mismo de las dos cargas de signo negativo (Q_1 y Q_3) sobre la carga de signo positivo (Q_2). Esto implica que un posible movimiento de una carga positiva desde un lugar alejado de las tres cargas hasta el punto P, sería una transformación espontánea, es decir, podría estar impulsada por las fuerzas del campo eléctrico que producen las tres cargas.

b) Determinación de la energía potencial eléctrica del sistema formado por las tres cargas

Puesto que cada pareja de cargas que puede considerarse dentro del sistema de las tres cargas tiene energía potencial eléctrica, la energía potencial del sistema se obtendrá sumando las energías potenciales correspondientes a las distintas parejas de carga que se pueden formar en dicho sistema. Por tanto:

$$Ep = Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23} = K\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r_{12}} + K\cdot\frac{Q_1\cdot Q_3}{r_{13}} + K\cdot\frac{Q_2\cdot Q_3}{r_{23}}$$

En la expresión anterior, r_{12}, r_{13} y r_{23}, son las distancias existentes entre las parejas de cargas correspondientes.

Al estar situadas las tres cargas en los vértices del triángulo, de lado L se cumple que: $r_{12} = r_{13} = r_{23} = L$.

Por tanto, la energía potencial del sistema considerado se puede expresar como:

$$E_p = \frac{K}{L}(Q_1\cdot Q_2 + Q_1\cdot Q_3 + Q_2\cdot Q_3)$$

Sustituyendo valores, se obtiene: $E_p = -\ 0'45$J.

c) Energía potencial de una carga q (y del campo) si se colocase en el centro del triángulo

Anteriormente ya hemos obtenido que el potencial V en el centro P del triángulo es:

$V = -\ 1'56\cdot10^5$ V

Por tanto, al colocar en ese punto la carga q, la Energía potencial buscada se podrá obtener como: $Ep = q\cdot V$, de modo que para calcularla basta con sustituir los valores correspondientes:

$$Ep = q\cdot V = 10^{-8}\cdot(-1'56\cdot10^5) = -1'56\cdot10^{-3}\ \text{J}$$