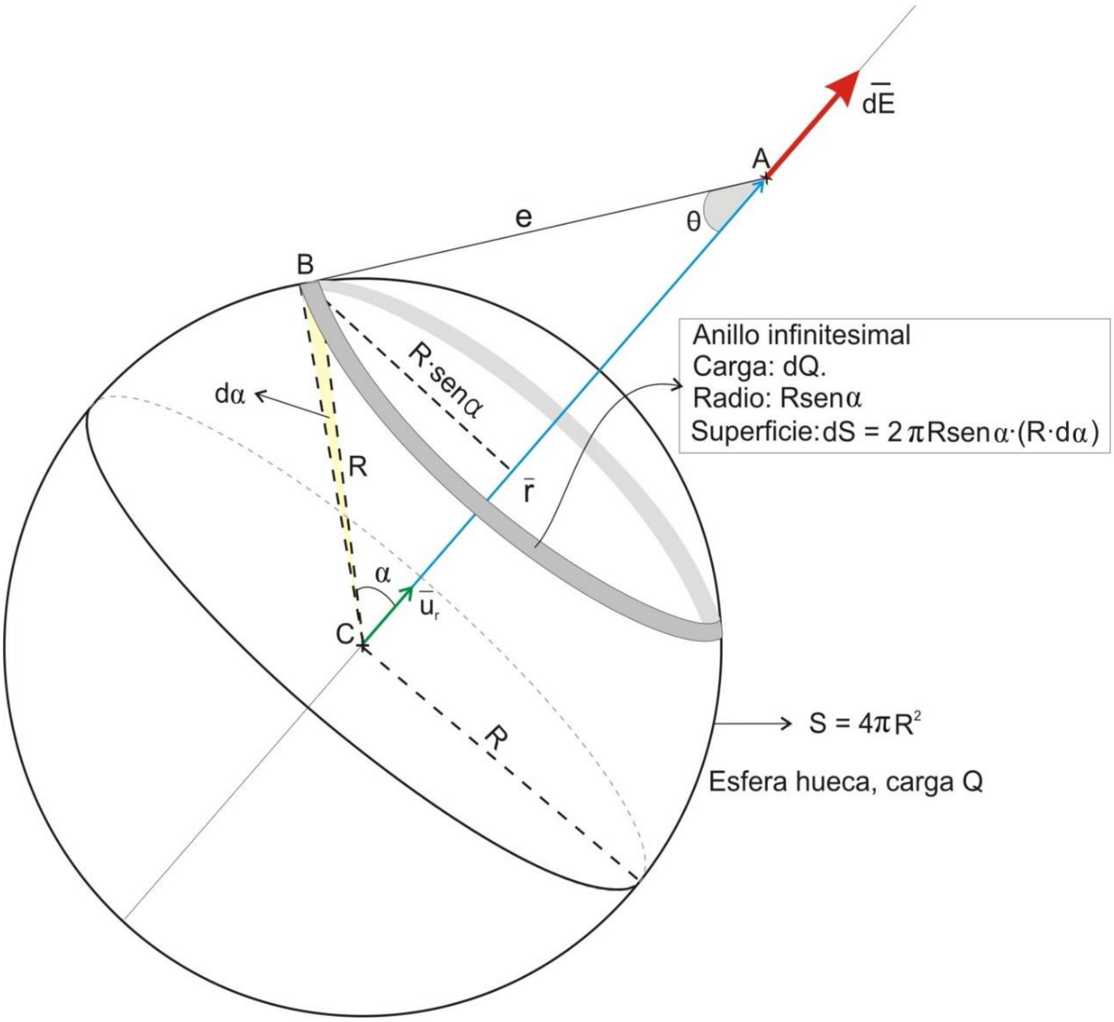
7. Dada una superficie esférica de radio R, cargada con una carga Q (positiva) uniformemente distribuida por la misma, se pide:

a) Intensidad del campo eléctrico generado por la esfera en un punto A situado a una distancia r de su centro C.
b) Potencial eléctrico en el mismo punto A.

Para resolver este ejercicio podemos imaginar a la esfera hueca cargada homogéneamente con una carga Q positiva, como una serie de infinitos anillos a cada uno de los cuales le corresponderá una carga dQ. Para realizar esta descomposición basta con cortar la capa esférica con planos infinitamente próximos y perpendiculares a la recta que une el centro O de la esfera con el punto A (situado a una distancia r del mismo) en el cual queremos hallar la intensidad del campo eléctrico resultante $\vec{E}$ creado por la esfera. Cada uno de dichos anillos contribuye generando en A una intensidad $d\vec{E}$

Supondremos, para comenzar, que el punto A se halla en el exterior de la esfera, tal y como se indica en la figura siguiente, en la que hemos representado la esfera y uno de esos anillos:



Conviene darse cuenta de que la anchura del anillo representado equivale a la longitud del arco que abarca el ángulo dα (sombreado en amarillo en la figura), es decir: R·dα, y que su longitud viene dada por la longitud de su circunferencia, es decir: 2πRsenα, de manera que para hallar la superficie del anillo basta imaginar que lo cortamos y formamos con él un rectángulo de lados 2πRsenα y R·dα.

a) De acuerdo con el ejercicio 5 resuelto anteriormente, podremos expresar $d\vec{E}$ como:

$$d\vec{E} = K \cdot \frac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_r$$

Expresando ahora la carga dQ en función de la densidad superficial de carga del anillo (de radio Rsenα y superficie dS = 2 π· Rsenα·R·dα), tendremos que:

$$d\vec{E} = K \cdot \frac{\sigma \cdot dS}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_r = K \cdot \frac{\sigma \cdot (2\pi R sen\alpha) \cdot (R \cdot d\alpha)}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_r = K \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi R^2 sen\alpha}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot d\alpha \cdot \vec{u}_r$$

Para obtener la intensidad del campo eléctrico resultante en el punto A, hay que sumar todos los $d\vec{E}$, es decir, hay que integrar la expresión anterior. Así pues:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int K \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi\, R^2 sen\alpha}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot d\alpha \cdot \vec{u}_r \quad (1)$$

En la integral anterior (en la que todavía no hemos puesto los límites), existen tres variables (e, α y θ) que están relacionadas entre sí, por lo que para poder resolverla hemos de expresarla en función de una sola de ellas. Conviene hacerlo en función de "e" cuyos límites de integración corresponden a r-R (para α = 0) y a R + r (para α = π). Cabe plantearse, pues:

¿Cómo podríamos relacionar α y θ con "e"?

Aplicando el teorema del coseno al triángulo de lados **R**, **e** y **r** de la figura anterior, obtenemos dos ecuaciones:

$e^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos\alpha$

$R^2 = r^2 + e^2 - 2re \cdot \cos\theta$

Derivando en la primera ecuación: 2e·de = -2rR·(-senα·dα) = 2rRsenα·dα

Y despejando: $sen\alpha \cdot d\alpha = \frac{e}{rR} \cdot de$ (2)

Despejando cosθ en la segunda ecuación: $\cos\theta = \frac{r^2 + e^2 - R^2}{2re}$ (3)

Sustituid las expresiones (2) y (3) en la ecuación (1) anterior y proceded a resolver la integral

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int K \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi\, R^2 sen\alpha}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot d\alpha \cdot \vec{u}_r = \int_{r-R}^{r+R} K \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi\, R^2}{e^2} \cdot \left(\frac{e}{rR} \cdot de\right) \cdot \left(\frac{r^2 + e^2 - R^2}{2re}\right) \cdot \vec{u}_r$$

Podemos ahora sacar fuera de la integral lo que es constante, simplificar y reordenar, con lo que:

$$\vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot 2\pi R^2}{2Rr^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{r^2 + e^2 - R^2}{e^2} \right) \cdot de \cdot \vec{u}_r \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot \pi R}{r^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{e^2} \right) \cdot de \cdot \vec{u}_r$$

Resolviendo la integral:

$$\vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot \pi R}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot \left[e - \frac{r^2 - R^2}{e} \right]_{r-R}^{r+R} \qquad (4)$$

Operando con los límites: $\vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot \pi R}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot 4R \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot 4\pi R^2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$

Sustituyendo ahora σ por $Q/4\pi R^2$ en el resultado anterior, obtenemos finalmente que:

$$\boxed{\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$$

Analizad el resultado final obtenido

La expresión final obtenida nos dice que toda superficie esférica cargada de tal forma que esa carga se halle distribuida homogéneamente se comporta, en cuanto a la intensidad del campo eléctrico que genera en un punto exterior a la misma, como si toda esa carga estuviese concentrada en el centro de dicha esfera.

En el caso particular de que el punto estuviese situado sobre la misma superficie la esfera, bastaría sustituir, en la expresión anterior, r por el radio de la misma R.

Este resultado es muy importante, porque nos muestra que podemos tratar a una esfera cargada homogéneamente como una carga puntual (con todas las ventajas que ello tiene). Si lo pensamos un poco, nos podemos dar cuenta de que ello es así como consecuencia de la geometría que tiene la forma esférica, la cual es totalmente simétrica en el espacio tridimensional. Como consecuencia de ello, el campo eléctrico que genera la esfera cargada se dispone radialmente en el espacio circundante a ella y el módulo de la intensidad de dicho campo es igual en todos aquellos puntos, en el espacio exterior a la esfera, que se encuentren a la misma distancia del centro. Puesto que esto se ha de cumplir independientemente de cuál sea el radio R de la esfera cargada, es inevitable concluir que dicha intensidad del campo eléctrico no puede depender del radio de la esfera y sí depende, en cambio, directamente de la distancia entre el punto en cuestión y el centro de la esfera.

Podemos ahora ir un poco más lejos y preguntarnos cuanto valdría el campo eléctrico resultante en cualquier punto situado en el interior de la esfera.

En cualquier punto situado en el interior de la esfera, se cumplirá que r (distancia al centro de la esfera) será menor que R (radio de la esfera). Por tanto, los límites de integración serán ahora, desde R-r hasta R+r.

Para facilitar una visión global de la situación, hemos procedido a hacer un esquema gráfico (figura 2) en el que vemos un plano frontal de la esfera. En dicho esquema se han incluido tres de los infinitos anillos en que consideramos descompuesta la esfera. El anillo 1 está muy cerca de P, de modo que la longitud e será tanto más parecida a R-r cuanto más nos aproximemos a P. Análogamente, en el anillo 3 el valor de e es cercano al valor R+r. Si nos vamos desplazando más hacia Q (anillos cada vez más pequeños) la e correspondiente va aumentando hasta que en un anillo centrado en Q y de radio infinitesimal (no indicado en el esquema), podremos admitir que e = R+r.

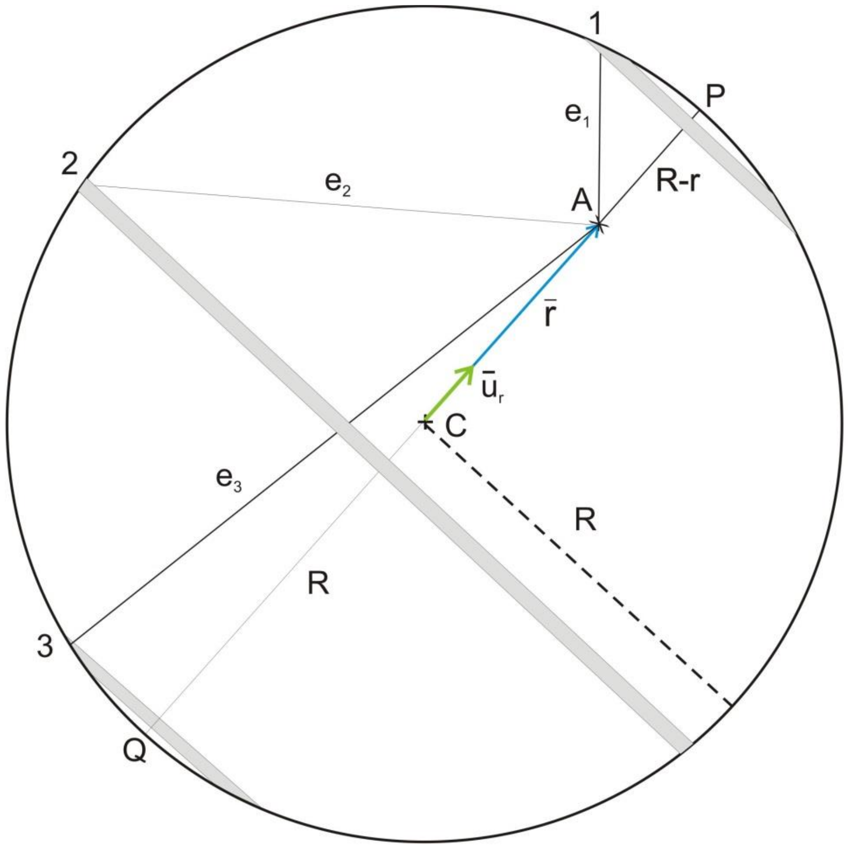


Figura 2

Si sustituimos los límites de la ecuación (4) por estos nuevos límites, obtendremos el resultado buscado. En efecto:

$$\vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot \pi R}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot \left[e - \frac{r^2 - R^2}{e} \right]_{R-r}^{R+r}$$

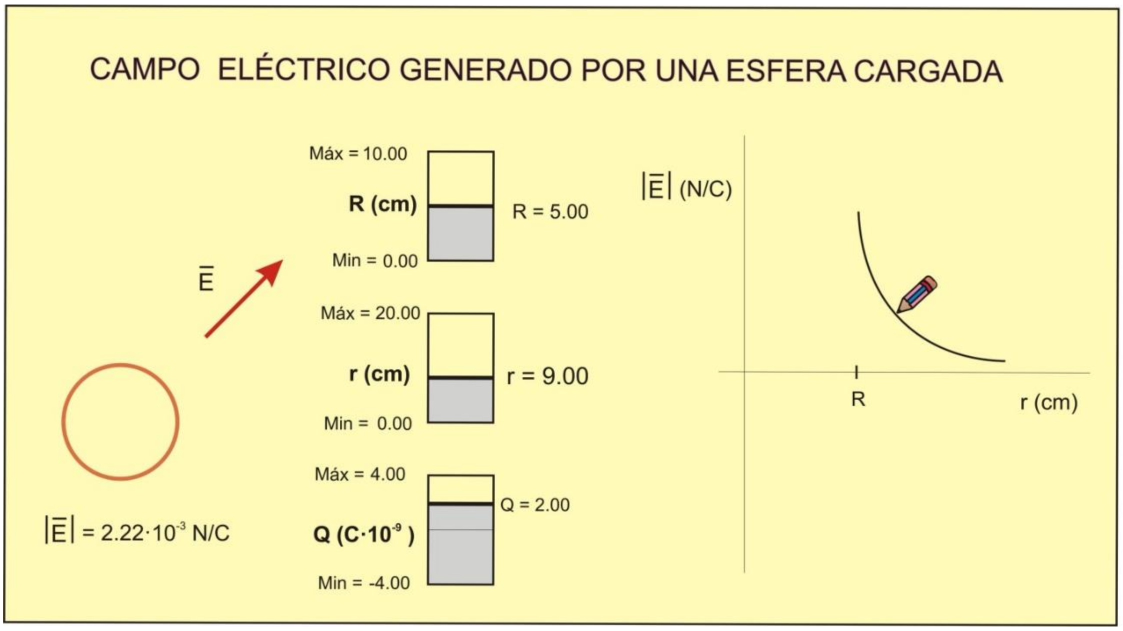
$$\vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot \pi R}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot \left[\left((R+r) - \frac{r^2 - R^2}{(R+r)} \right) - \left((R-r) - \frac{r^2 - R^2}{(R-r)} \right) \right]$$

$$\vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot \pi R}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot (2R - 2R) = 0$$

Se trata de una conclusión muy importante:

El campo eléctrico en el interior de una esfera hueca y cargada es nulo. Esto implica que cualquier pequeña carga de prueba situada en su interior, no se vería sometida a ninguna fuerza eléctrica resultante. La esfera actúa, por tanto, hacia dentro de sí como “aislante” del campo que ella misma crea en el exterior.

Para reforzar estos conceptos se puede usar una animación informática *Modellus*, que calcula y representa en campo eléctrico generado por la esfera cargada. Se pueden modificar todos los parámetros (incluyendo la posibilidad de que la carga sea positiva o negativa, de que r sea mayor o menor que R, etc.) y ver cómo influyen en el resultado. Para un determinado valor del resto de variables, se puede ir modificando poco a poco la distancia r y, entonces, en la pantalla de la animación también se va dibujando la gráfica de la intensidad del campo eléctrico con respecto a esa distancia.



La animación está disponible en la web de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).

b) *Sugerid y llevad a cabo un procedimiento para calcular el potencial eléctrico en los dos puntos que acabamos de considerar para la intensidad del campo (exterior e interior de la esfera).*

Para obtener el potencial podemos utilizar un procedimiento análogo al que hemos seguido para el campo eléctrico, es decir, consideraremos en primer lugar el potencial en un punto A debido a un anillo de carga infinitesimal y después sumaremos todas las contribuciones debidas a los infinitos anillos de este tipo que forman la capa esférica.

El potencial correspondiente a uno de los anillos de carga dQ en un punto A (ved ejercicio 5) será:

$$dV = K \cdot \frac{dQ}{e}$$

de forma que el que se debe a toda la esfera se podrá obtener como: $V = \int K \cdot \frac{dQ}{e}$

Se trata ahora de *resolver esa integral.*

Para ello, hemos de reducir las dos variables a una sola. Como ya hemos visto, $dQ = \sigma \cdot dS$ siendo $\sigma = Q/S = Q/4\pi R^2$ y $dS = 2\pi\,(R\text{sen}\alpha)\cdot R\cdot d\alpha$. Con lo que para un punto A exterior a la capa esférica nos quedará:

$$V = \int K\frac{dq}{e} = \int_0^{\pi} \frac{K\cdot\sigma\cdot 2\pi(Rsen\alpha)\cdot R\cdot d\alpha}{e} = K\sigma 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \frac{sen\alpha\cdot d\alpha}{e}$$

Para resolver la integral basta tener en cuenta la ecuación (2) anterior

($sen\alpha \cdot d\alpha = \frac{e}{rR} \cdot de$) y que “e” varia entre r-R y r+R

Con lo que: V = $K\sigma 2\pi R^2 \int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{1}{rR}\right) \cdot de$ (5)

Y resolviendo la integral: $\frac{K\sigma 2\pi R^2}{rR} \cdot [e]_{r-R}^{r+R} = \frac{K\sigma 2\pi R}{r} \cdot 2R = \frac{K\sigma 4\pi R^2}{r}$

Sustituyendo ahora $\sigma \cdot 4\pi R^2$ por la carga total Q de la esfera, obtenemos finalmente que el potencial en cualquier punto A exterior viene dado por:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

Analizad el resultado final obtenido

La expresión final obtenida nos dice (como no podía ser de otro modo), que toda superficie esférica cargada de tal forma que esa carga se halle uniformemente distribuida, también se comporta, en cuanto al potencial del campo eléctrico que genera en un punto exterior a la misma, como si toda esa carga estuviese concentrada en el centro de dicha esfera.

En el caso de que el punto esté situado sobre la misma superficie de la esfera, bastará sustituir, en la expresión anterior, r por el radio de la misma R.

Calculad V para el caso de un punto situado en el interior de la esfera (r < R).

El procedimiento será el mismo, pero los límites de la integral cambiarán siendo en este caso, como ya hemos visto anteriormente, desde R-r hasta R+r. U*tilizando estos límites en la ecuación (5) anterior*, obtenemos:

V = $K\sigma 2\pi R^2 \int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{1}{rR}\right) \cdot de = \frac{K\sigma 2\pi R^2}{rR} \cdot (2r)$

Y sustituyendo $\sigma = Q/4\pi R^2$ llegamos finalmente el potencial buscado: $V = K \cdot \frac{Q}{R}$

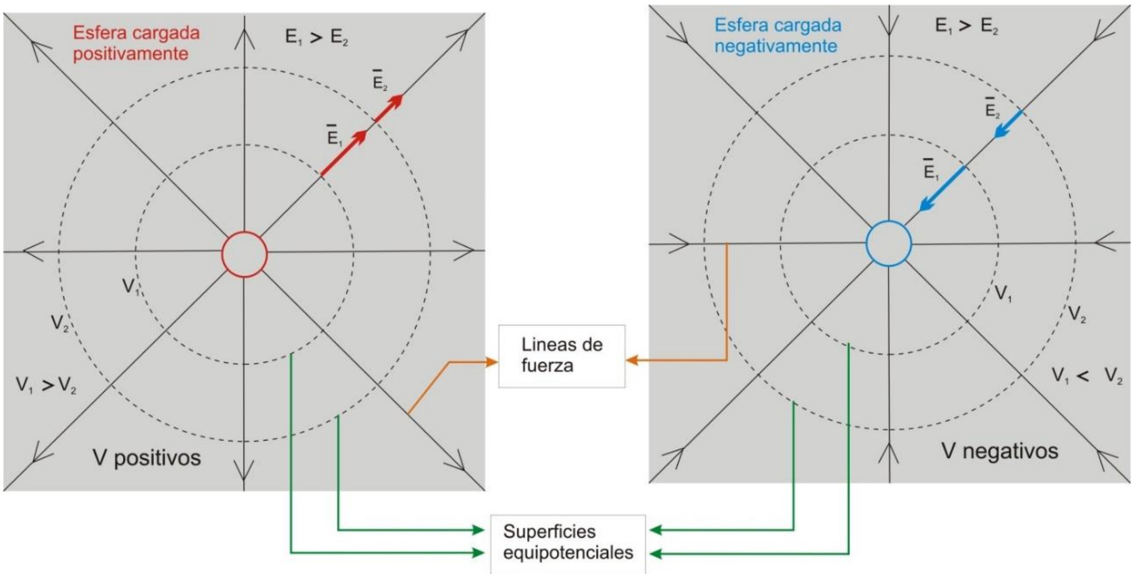
Esta última expresión, se puede aplicar a cualquier punto del interior de la esfera sea cual sea la distancia a que se encuentre del centro.

Los resultados anteriores nos indican que:

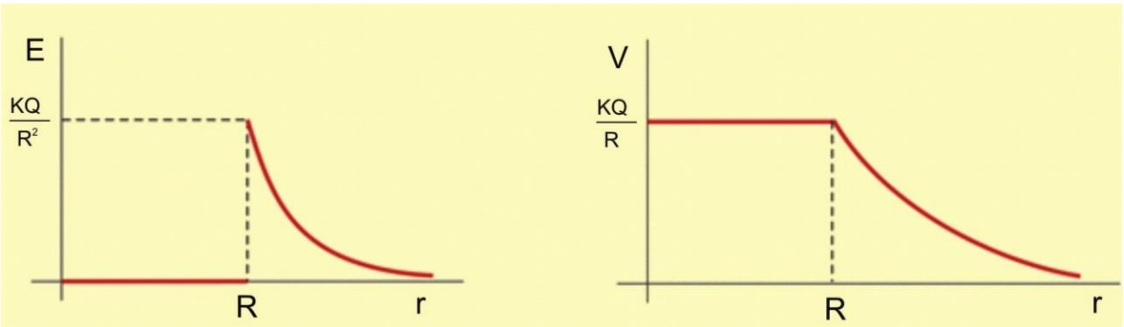
-En todo el volumen interior de la esfera conductora, el potencial es el mismo (constante) y su valor en cualquier punto coincide con el que existe en la superficie de la esfera.

-La superficie de la esfera (homogéneamente cargada) es una superficie equipotencial.

Estas conclusiones tienen una gran importancia y <u>se dan en todos los conductores cargados y en equilibrio, aunque no sean esféricos ni huecos</u>. Se trata, por otra parte, de conclusiones que se pueden explicar de forma cualitativa, ya que, si en el propio conductor hubiese dos puntos a diferente potencial, las cargas se desplazarían por acción del campo que existiría entre esos puntos. Además, la simetría que presenta esta situación problemática, junto con la consideración de la relación que existe entre el campo eléctrico y el potencial implican que, en este caso, cualquier esfera concéntrica de radio r > R ha de ser una superficie equipotencial. El campo eléctrico que genera la esfera en el exterior ha de atravesar perpendicularmente a estas superficies equipotenciales y orientarse de modo que vaya de mayor a menor potencial (recordemos que, como se indica en el enunciado la esfera está cargada positivamente). Por tanto, la superficie de la esfera no es cualquier superficie equipotencial, sino aquella en la que el potencial eléctrico es máximo. Si la esfera estuviese cargada negativamente las líneas de fuerza que representan el campo eléctrico también atravesarán perpendicularmente a todas esas superficies equipotenciales pero, en este caso, se orientarán de mayor a menor potencial, es decir, hacia el centro de la esfera y el potencial en la superficie será mínimo (máximo en valor absoluto). Así pues, en el primer caso (esfera cargada positivamente) la esfera actúa como "fuente" de líneas de fuerza que salen radialmente de la superficie de la misma (V máximo) y se dirigen hacia el infinito (V = 0), mientras que en el segundo caso (esfera cargada negativamente) esta actúa como sumidero de líneas de fuerza, las cuales se dirigen radialmente desde el infinito (V = 0) hacia su superficie (V mínimo). En la figura siguiente hemos representado estas dos posibilidades.



Podemos *"visualizar" las conclusiones anteriores, representando de forma cualitativa las gráficas de la intensidad del campo eléctrico y del potencial, en función de la distancia r desde el centro de la esfera cargada positivamente, hasta el punto donde queramos evaluarlos*:



Para terminar estos cálculos del campo y potencial eléctricos generados por distribuciones continuas de carga, nos plantearemos el caso de que dicha distribución sea rectilínea.