6. Dado un disco de radio R, cargado con una carga Q (positiva) uniformemente distribuida, se pide:

a) Determinad la intensidad del campo eléctrico que genera en un punto A de la recta perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro.

b) Hallad el potencial eléctrico en ese mismo punto A.

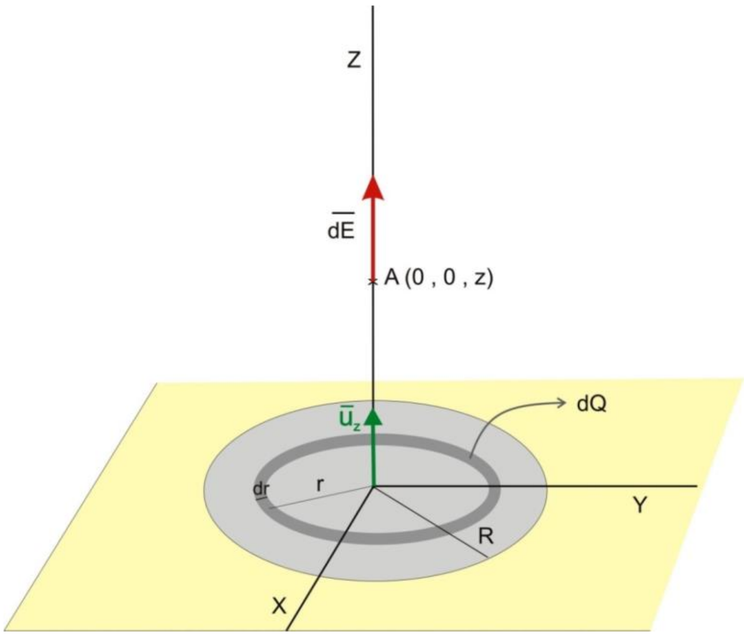
a) Determinación de la intensidad de campo eléctrico.

Como acabamos de comentar en el problema anterior, para afrontar la situación aquí planteada, vamos a descomponer la carga Q del disco en infinitas cargas dQ correspondientes a las cargas de otros tantos anillos concéntricos, de anchura infinitesimal dr, cuyos radios van variando entre r = 0 y r = R. Esta estrategia es la más conveniente para aprovechar el resultado del problema anterior e, igual que antes, para aplicarla, simplificaremos el problema, considerando el grosor del disco despreciable.

En este caso, pues, la contribución de cada uno de esos anillos (ved resultado problema anterior) al campo en el punto A del eje del disco vendrá dada por:

$$d\vec{E} = K \cdot \frac{dQ}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \vec{u}_z$$

En la figura siguiente podemos ver la intensidad del campo eléctrico generado en el punto A por uno de tales anillos de carga dQ radio r y espesor dr.



El campo resultante en A, será la suma de las contribuciones de todos los anillos en que consideremos descompuesto el disco, suma que debermos obtener integrando la expresión anterior, es decir:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

Sustituyendo la expresión correspondiente a $d\vec{E}$ en la igualdad anterior:

$$\vec{E} = \int K \cdot \frac{dQ}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \vec{u}_z \quad (1)$$

En la ecuación anterior, z es constante, pero sigue habiendo dos variables. Para poder resolver la integral, necesitamos reducirlas a una sola. ¿Cómo podríamos hacerlo?

Dado que el disco está uniformemente cargado, podemos expresar la carga dQ de cada anillo elemental, en función de la densidad superficial de carga σ (que será constante). En efecto:

La densidad de carga del disco completo (considerado como una superficie plana) vendrá dada por: $\sigma = \dfrac{Q}{\pi R^2}$ (2)

Dicha densidad, como acabamos de razonar, será la misma que la de cada uno de los infinitos anillos que lo forman. Si escogemos uno cualquiera de ellos, de radio r y espesor dr, podemos considerar que su superficie equivale a la de un un rectángulo de lados 2πr y dr y que, por tanto, la densidad de carga en este caso, vendrá dada por:

$$\sigma = \frac{dQ}{2\pi r \cdot dr} \quad (3)$$

Y despejando: $dQ = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$

Sustituyendo ahora en (1):

$$\vec{E} = \int_0^R K \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \vec{u}_z = K \cdot \sigma \cdot \pi \cdot z \cdot \int_0^R (r^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2r \cdot dr \cdot \vec{u}_z$$

Resolviendo la integral anterior:

$$\vec{E} = K \cdot \sigma \cdot \pi \cdot z \cdot \vec{u}_z \cdot \left[\frac{-2}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R = K \cdot \sigma \cdot \pi \cdot z \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right) \cdot \vec{u}_z$$

Y simplificando: $\vec{E} == K \cdot \sigma \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \dfrac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right) \cdot \vec{u}_z$ (4a)

Podemos simplificar aun más el resultado (4a) anterior, si expresamos la constante K en función de la constante dieléctrica del medio (que supondremos el vacío). En ese caso, el resultado se transforma en:

$$\vec{E} == \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sigma\cdot 2\pi\cdot\left(1-\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right)\cdot\vec{u}_z \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left(1-\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right)\cdot\vec{u}_z \quad (4b)$$

O, también, podríamos simplemente sustituir σ en (4a), con lo que obtendríamos:

$$\vec{E} == K\cdot\frac{Q}{\pi\cdot R^2}\cdot 2\pi\cdot\left(1-\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right)\cdot\vec{u}_z \rightarrow \vec{E} == K\cdot\frac{Q}{R^2}\cdot 2\cdot\left(1-\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right)\cdot\vec{u}_z$$
(4c)

Analizad el resultado obtenido

Una vez comprobado que el resultado es dimensionalmente homogéneo (N/C en ambos lados), vale la pena *analizar detenidamente lo que ocurre en el caso particular de que R sea mucho más grande que la distancia z* (es decir: R >> z para cualquier valor de z, o bien, lo que es equivalente, que z → 0 para cualquier valor de R). En este caso límite, el disco se comporta como una lámina plana uniformemente cargada y de extensión infinita. Para determinar la intensidad del campo eléctrico, hemos de tener en cuenta que, en las conciciones límite expresadas, el segundo término de la diferencia que figura en el paréntesis del resultado 4b, tiende a 0, con lo que el resultado quedaría como:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{u}_z \quad (5)$$

¿Qué ocurriría en el caso particular de que z fuese mucho mayor que el radio R del disco?

En ese caso, opuesto al anterior, el disco se iría aproximando hacia una carga puntual Q a medida que aumentara la distancia z en comparación con R, por lo que la expresión 4c, si es correcta, debería contemplar también este hecho. Para comprobarlo, dado que al intentar obtener el límite en la expresión 4c correspondiente al caso R → 0, se obtiene de entrada una indeterminación (∞·0), recurrimos a desarrollar la expresión:

Comentado [U1]: La indeterminación es del tipo 0/0. DISCUTIR

$$(R^2+z^2)^{1/2} = z\cdot\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2}$$

Aplicando el Teorema del Binomio:

$$(R^2+z^2)^{1/2} = z\cdot\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} = z\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{z^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{R^4}{z^4}+\frac{1}{16}\cdot\frac{R^6}{z^6}+\ldots\right)$$

Para valores de z muy grandes con respecto a R, podemos despreciar todos los sumandos del paréntesis anterior frente a los dos primeros (dado que z figura siempre en el denominador y elevada a exponentes cada vez más grandes). En ese caso, podemos escribir que:

$$(R^2+z^2)^{1/2} \approx z+\frac{R^2}{2z}$$

Con lo que el término entre paréntesis de (4c) quedaría como:

$$\left(1-\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right) \approx \left((1-\frac{z}{z+\frac{R^2}{2z}}\right)=\left(1-\frac{2z^2}{2z^2+R^2}\right)=\left(\frac{R^2}{2z^2+R^2}\right)$$

Sustituyendo ahora en (4c):

$$\vec{E} == K\cdot\frac{Q}{R^2}\cdot 2\cdot\left(\frac{R^2}{2z^2+R^2}\right)\cdot\vec{u}_z$$

Finalmente, simplificando y despreciando R^2 frente a $2z^2$, obtenemos que:

$$\vec{E} == K\cdot\frac{Q}{z^2}\cdot\vec{u}_z \qquad (6)$$

La expresión obtenida, coincide, como habíamos supuesto, con la correspondiente a la intensidad del campo eléctrico generado por una carga puntual a una distancia z de la misma.

b) Determinación del potencial eléctrico.

Para obtener el potencial del campo eléctrico en el mismo punto A, seguiremos la misma estrategia que hemos utilizado con la intensidad del campo eléctrico. De acuerdo con ello, y teniendo en cuenta el resultado obtenido en el problema 5 anterior, tendremos que para cada elemento de carga dQ (anillo), su contribución al potencial en A será:

$$dV = K\cdot\frac{dQ}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Con lo que el potencial en A debido a todo el disco, se obtendrá integrando para los infinitos anillos en que se divide el disco:

$$V=\int dV = K\cdot\int\frac{dQ}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Teniendo en cuenta que, como ya se ha visto antes, $dQ = \sigma\cdot 2\pi r\cdot dr$

$$V=\int_0^R K\cdot\frac{\sigma\cdot 2\pi r\cdot dr}{(r^2+z^2)^{1/2}} = K\cdot\sigma\cdot 2\pi\cdot\int_0^R (r^2+z^2)^{-1/2}\cdot r\cdot dr$$

Resolviendo la integral anterior:

$$V = K\cdot\sigma\cdot 2\pi\cdot\left[(r^2+z^2)^{1/2}\right]_0^R \rightarrow V = K\cdot\sigma\cdot 2\pi\cdot(\sqrt{R^2+z^2}-z) \qquad (7)$$

También podemos ahora expresar V en función de la carga total Q sustituyendo σ en (7):

$$V = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{R^2 + z^2} - z) \quad (8)$$

Comprobad que el resultado (8) obtenido (válido para todos los valores positivos de z), se transforma en el correspondiente a una carga puntual Q, cuando se hace la aproximación de considerar z >> R.

Igual que hemos hecho con el campo, usaremos el teorema del binómio para desarrollar $\sqrt{R^2 + z^2}$ y, para valores de z muy grandes, podemos despreciar todos los sumandos frente a los dos primeros, quedando:

$$(R^2 + z^2)^{1/2} \approx z + \frac{R^2}{2z}$$

Y, sustituyendo en (8):

$$V = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot (z + \frac{R^2}{2z} - z) \;\; \rightarrow \;\; V = K \cdot \frac{Q}{z} \quad (9)$$

Como esperábamos, (9) coincide con la expresión del potencial eléctrico de una carga puntual Q colocada en el centro del disco.

Después de haber resuelto estos dos problemas (5 y 6) podemos plantearnos hacer una comparación entre ambas situaciones.

Comparad la intensidad de campo y el potencial generados en un mismo punto del eje por un anillo cargado (problema 5), por un disco cargado (problema actual, 6) y por una carga puntual situada en el centro, suponiendo que los dos primeros tengan el mismo radio y que todos acumulen la misma carga total, Q.

Si pensamos que una misma carga Q se puede distribuir toda ella en el anillo, repartirse por toda el área del círculo que conforma el disco o concentrarse en el punto central de ambos, nos damos cuenta inmediatamente de que tanto la intensidad del campo eléctrico como el valor del potencial, han de aumentar a medida que se dispone de más carga cerca de dicho centro, ya que la distancia de esa carga al punto A disminuye a medida que esto ocurre. Por tanto, en la situación planteada (recordemos disco y anillo cargados positivamente) se ha de cumplir que:

Para un mismo valor de la carga total Q (suponiendo que Q > 0) en cualquier punto del eje z (como el punto A), habrá de cumplirse que:

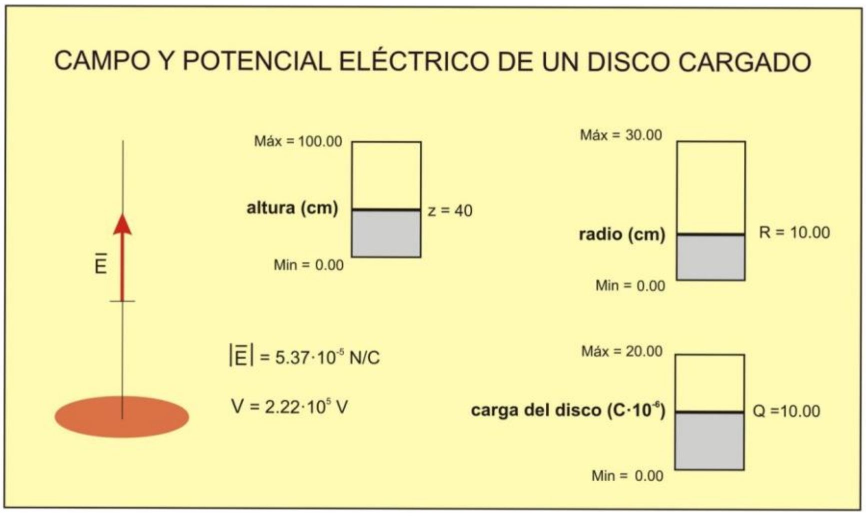
$V_{anillo} < V_{disco} < V_{centro}$

Y, también:

$E_{anillo} < E_{disco} < E_{centro}$

En el caso del campo eléctrico, además de que su intensidad depende de la inversa del cuadrado de la distancia, ocurre que a medida que la carga que crea dicho campo en el eje z se aproxime al centro, el vector que representa al campo en el punto A se inclinará menos en la dirección horizontal, por lo que la resultante (componente vertical) también tendrá que ser mayor.

Hemos elaborado una animación informática para este problema, relativo al disco, semejante a la anterior sobre el problema relativo al anillo.



Disponible también en la web de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).