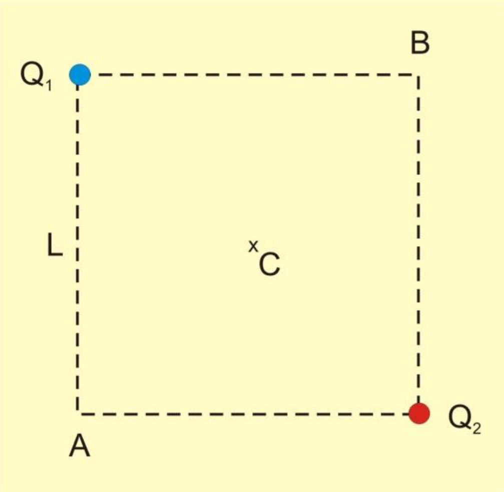
18. Supongamos dos cargas eléctricas puntuales Q_1 = -9 µC y Q_2 = 6 µC, situadas en dos de los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado tal y como se muestra en la figura adjunta:



Determinad:

a) El trabajo mínimo necesario para trasladar una tercera carga q = 3 µC, inicialmente en reposo, desde el vértice A hasta el vértice B de dicho cuadrado.
b) La energía potencial eléctrica del sistema formado por las tres cargas, cuando q de halle en A, en el centro C del cuadrado y en B

a) Para calcular el trabajo mínimo que se pide, podemos partir de la expresión general:

$$Wres_A^B = \Delta Ec_A^B$$

Dicho trabajo resultante corresponde a la suma del trabajo exterior (Wext) y del trabajo realizado por el campo (Welec), con lo que podemos escribir la expresión anterior como:

$$Wext_A^B + Welec_A^B = \Delta Ec_A^B = Ec_B - Ec_A$$

Si, ahora, tenemos en cuenta ahora que $Ec_A = 0$ y que $Welec_A^B = -\Delta Ep$:

$$Wext_A^B = \Delta Ep_A^B + Ec_B$$

Y, como ΔEp solo depende de los puntos A y B, Wext será mínimo cuando $Ec_B = 0$.

Por tanto: $Wext_{\min} = \Delta Ep_A^B = q \cdot (V_B - V_A)$

Sabemos que el potencial del campo eléctrico creado por una carga puntual, a una distancia r de la misma, viene dado por la expresión:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

En nuestro caso, Como los dos puntos A y B se hallan a la misma distancia L (lado del cuadrado), tanto de Q_1, como de Q_2, el potencial en A y en B será el mismo, de modo que la diferencia de potencial entre ambos, será: $V_B - V_A = 0$.

Concluimos que: cuando q se traslade desde A hasta B, el trabajo exterior mínimo será 0.

Si quisiéramos calcular el potencial en A y B, bastaría tener en cuenta que:

$$V_A = V_B = V_1 + V_2 = \frac{K}{L}(Q_1 + Q_2)$$

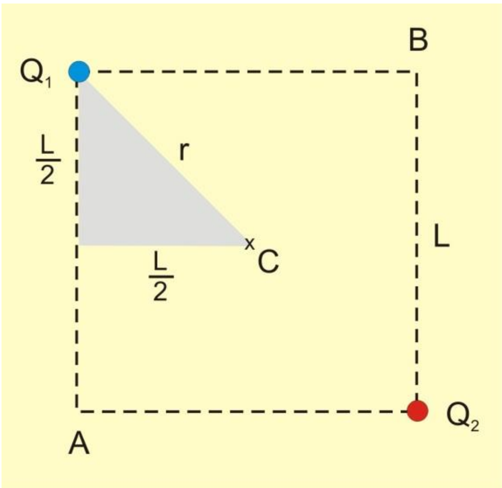
Y sustituyendo valores:

$$V_A = V_B = \frac{9 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^{-1}}(-9 + 6)10^{-6} = -1.35 \cdot 10^5 V$$

Supongamos que se quiere llevar la carga q desde el punto A hasta centro del cuadrado y luego desde dicho centro del cuadrado hasta el punto B (todo ello siguiendo la diagonal del mismo). Determinad el trabajo exterior mínimo necesario en cada uno de estos dos procesos.

Para obtener el trabajo que se nos pide, hemos de obtener antes el potencial total en el centro del cuadrado y para ello necesitamos conocer la distancia r a la que se encuentra C de cualquiera de las dos cargas:

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado en la figura siguiente:



$$r^{2'} = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2} \rightarrow r = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, el potencial en el centro del cuadrado es:

$$V_C = \frac{K \cdot \sqrt{2}}{L}(Q_1 + Q_2) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2}}{0'2} \cdot (-9+6) \cdot 10^{-6} = -1.91 \cdot 10^5 \ V$$

El trabajo exterior será:

$W_{ext\ (AC)} = q \cdot (V_C - V_A) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot (-1'91 \cdot 10^5 + 1'35 \cdot 10^5 +) = -1'68 \cdot 10^{-1}$ J

$W_{ext\ (CB)} = q \cdot (V_B - V_C) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot (-1'35 \cdot 10^5 + 1'91 \cdot 10^5) = 1'68 \cdot 10^{-1}$ J

Así pues: $W_{ext\ (AB)} = W_{ext\ (AC)} + W_{ext\ (CA)} = -1'68 \cdot 10^{-1} + 1'68 \cdot 10^{-1} = 0$

Podemos plantearnos ahora qué ocurre con la energía potencial de q (y el campo) en los dos pasos anteriores.

Para el tramo AC:

$W_{res\ (AC)} = W_{elec(AC)} + W_{ext(AC)} = \Delta Ec_{(AC)} = 0 \rightarrow W_{ext(AC)} = -W_{elec(AC)} = \Delta Ep_{(AC)} = -1'68 \cdot 10^{-1}$ J

Para el tramo CB:

$W_{res\ (CB)} = W_{elec(CB)} + W_{ext(CB)} = \Delta Ec_{(CB)} = 0 \rightarrow W_{ext(CB)} = -W_{elec(CB)} = \Delta Ep_{(CB)} = 1'68 \cdot 10^{-1}$ J

Así pues, en la transformación que lleva la carga q de 3 μC desde el vértice A hasta el centro C del cuadrado la energía potencial de q (y el campo) disminuye en $1'68 \cdot 10^{-1}$ J, mientras que en la siguiente mitad (desde C hasta B), aumenta en la misma cantidad.

***b)** Obtened la energía potencial del sistema cuando la carga q está en las posiciones A, C y B*

Obtenemos:

$Ep_A = q \cdot V_A = 3 \cdot 10^{-6} \cdot (-1'35 \cdot 10^5) = -4'05 \cdot 10^{-1}$ J

$Ep_C = q \cdot V_C = 3 \cdot 10^{-6} \cdot (-1'91 \cdot 10^5) = -5'73 \cdot 10^{-1}$ J

$Ep_B = q \cdot V_B = 3 \cdot 10^{-6} \cdot (-1'35 \cdot 10^5) = -4'05 \cdot 10^{-1}$ J

En el desplazamiento desde A hasta C:

$\Delta Ep_{(AC)} = Ep_C - Ep_A = (-5'73 + 4'05) \cdot 10^{-1} = -1'68 \cdot 10^{-1}$ J

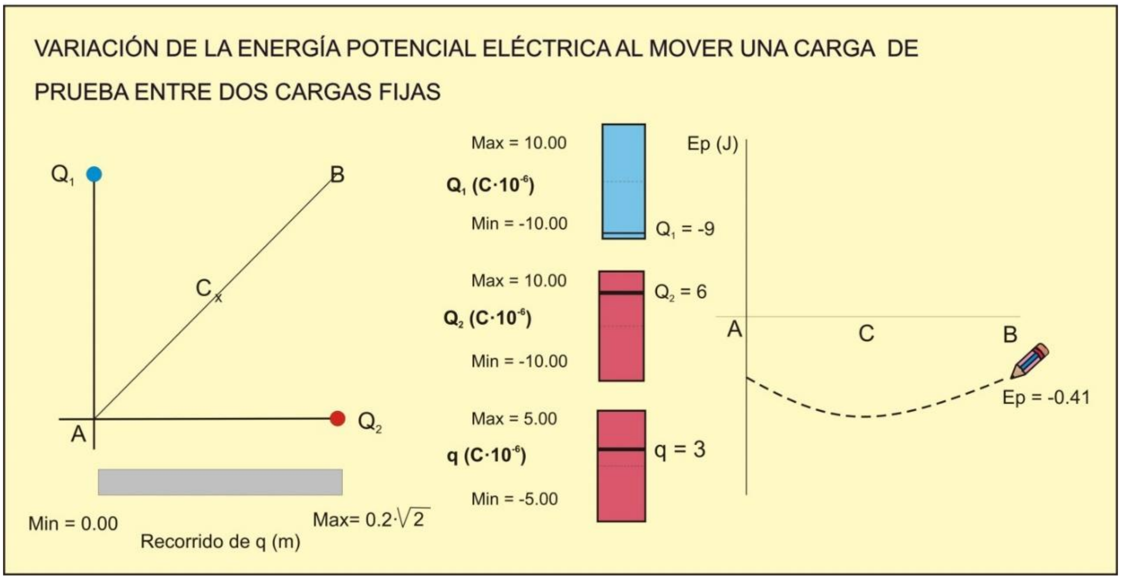
En el desplazamiento desde C hasta B:

$\Delta Ep_{(CB)} = Ep_B - Ep_C = (-4'05 + 5'73) \cdot 10^{-1} = 1'68 \cdot 10^{-1}$ J

Como vemos, los resultados anteriores confirman que la energía potencial del sistema que forman las tres cargas es igual cuando la carga q se sitúa en las posiciones A y B (vértices del cuadrado) y menor cuando la carga q ocupa la posición C, intermedia entre A y B. En el desplazamiento de la carga q desde hasta C la energía potencial disminuye (transformación espontánea) y en el desplazamiento desde C hasta B aumenta (transformación forzada)

Todas estas cuestiones se pueden visualizar con una animación informática *Modellus* interactiva que, como hemos hecho en este problema, permite desplazar una carga de prueba q por la diagonal de un cuadrado en dos de cuyos vértices se sitúan dos cargas fijas. A medida que lo hacemos, la animación calcula y va representando la gráfica de la evolución de la energía potencial del sistema que forman las tres cargas y también aporta en cada instante el valor del potencial en el punto por donde está pasando la carga q. Se pueden modificar los valores de las tres cargas, así como el lado del cuadrado, para comprobar cómo afectan estas modificaciones a todos los resultados.

En la figura siguiente puede verse el aspecto de la pantalla al final de una transformación en la que se ha desplazado la carga q de prueba desde A hasta B y en la que se han adoptado los valores de las magnitudes que hemos considerado en este problema.



La animación y el programa para poder utilizarla en cualquier ordenador están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm.