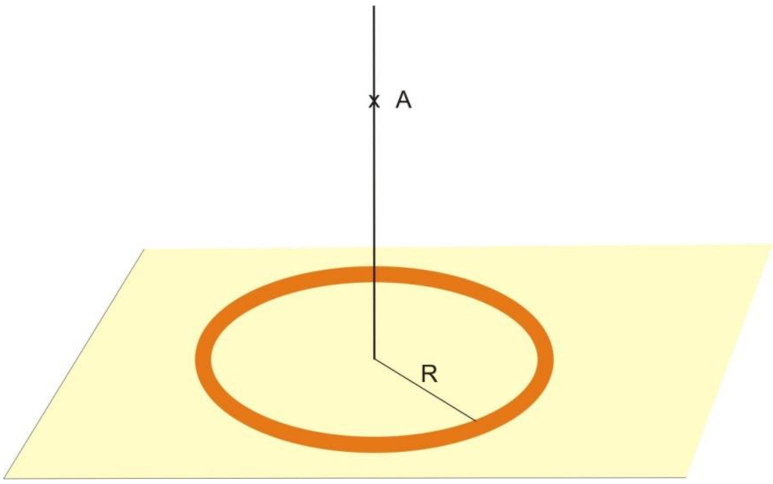
5. Dado un anillo de radio R, cargado con una carga Q uniformemente distribuida: a) Determinad la intensidad del campo eléctrico que crea en un punto A de la recta perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro. b) Hallad también el potencial en dicho punto.



Datos: $Q = 10^{-5}$ C, R = 10 cm, A se encuentra a 40 cm del centro del anillo.

a) Obtención del campo eléctrico

Dado que la carga Q del anillo no es una carga puntual, para resolver el problema podemos descomponerla en infinitas cargas dQ que sí podrán considerarse puntuales, hallar la expresión del campo eléctrico $d\vec{E}$ correspondiente a cada una de dichas cargas infinitesimales (en el punto A considerado), y, finalmente, obtener $\vec{E}$ como la suma (es decir, la integral) de todos los $d\vec{E}$.

Podemos simplificar el problema suponiendo que el grosor del anillo es despreciable frente a su longitud L, lo que permite considerar dicho anillo como una distribución lineal de carga, de longitud $L = 2\pi R$. Entonces, para descomponer la carga Q bastará dividir el anillo en elementos de longitud dL a cada uno de los cuales le corresponderá una carga dQ.

En la figura 1 siguiente, hemos representado la intensidad del campo eléctrico generado en el punto A por uno de tales elementos de carga dQ.

Podemos pensar en cómo sería la contribución del resto de los elementos que conforman el anillo y preguntarnos:

¿Hacia dónde iría dirigida la intensidad del campo eléctrico resultante en A?

En la figura 1, se puede ver que hemos escogido un sistema de referencia con origen en el centro del anillo. Por la simetría que presenta la figura, es fácil darse cuenta de que el vector $\vec{E}$ resultante, se encontrará sobre el eje Z y sentido hacia arriba.

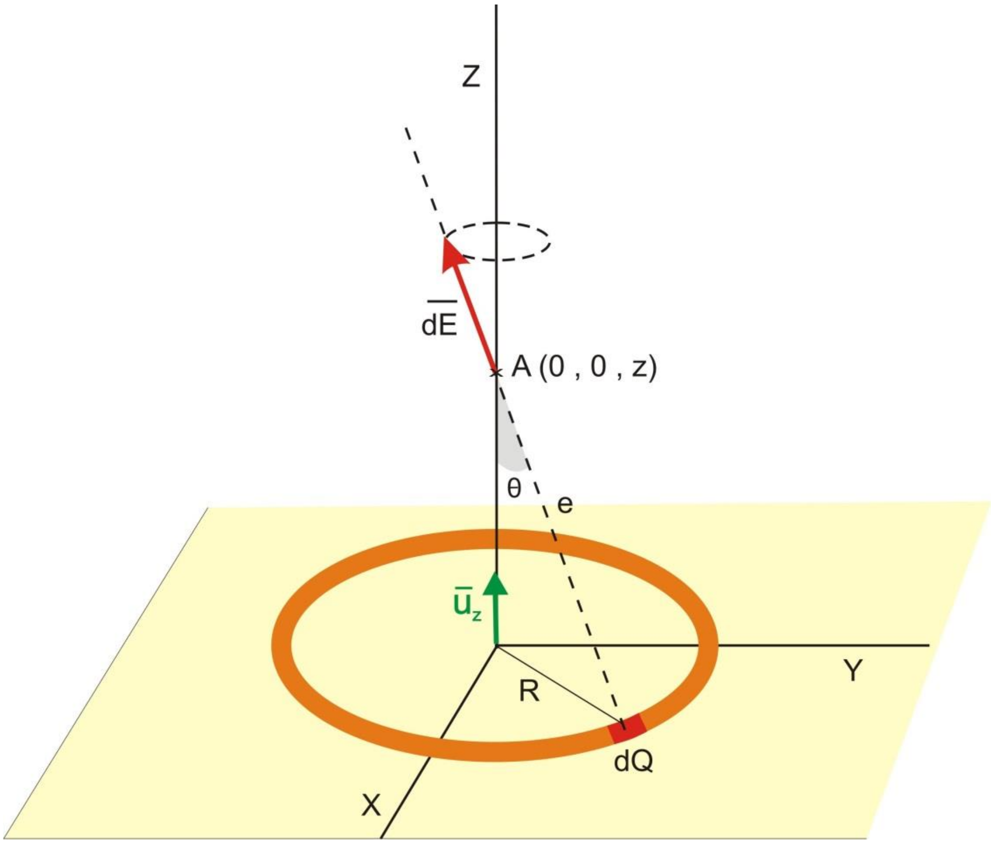


Figura 1

Esto es así, porque para cada elemento de carga dQ del anillo, existe otro igual dQ' en el extremo opuesto del diámetro que los une, tal que las componentes horizontales de los vectores $d\vec{E}$ y $d\vec{E}'$ correspondientes, se anulan entre ellas, por lo que para calcular $\vec{E}$ basta con sumar las componentes verticales sobre el eje Z (todas ellas iguales y con el mismo sentido). En la figura 2 siguiente se muestra esquemáticamente la situación descrita.

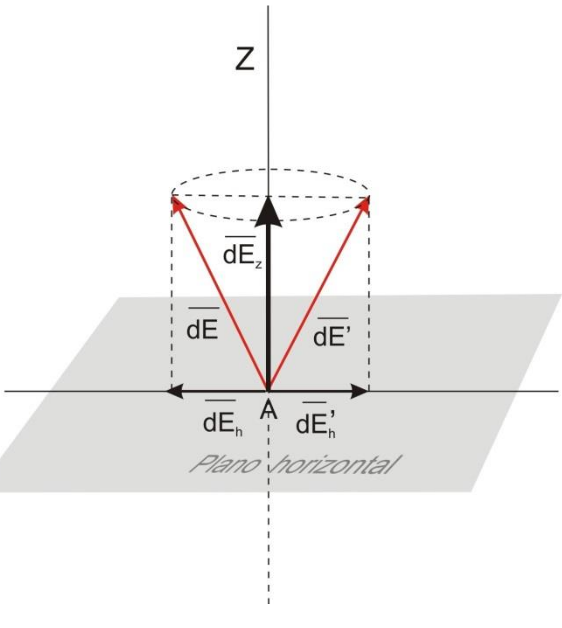


Figura 2

Así pues, el problema será determinar: $\vec{E} = \int d\vec{E}_z$

¿De qué factores cabe pensar que podrá depender $\vec{E}$? ¿Cómo influirá cada uno?

A título de hipótesis, cabe esperar que E dependa del valor de la carga Q, de la distancia z al centro del anillo y del radio R del anillo, además, por supuesto, de la constante K del medio en el que nos encontremos (que habitualmente, si no se especifica otra cosa, se supone es el aire).

En cuanto a la influencia de cada uno (siempre manteniendo constantes los demás), parece lógico pensar que si la carga Q del anillo aumenta, también deberá aumentar E. Por otra parte, si z (distancia vertical al centro del anillo) aumenta, E disminuirá, puesto que un aumento de z implica que nos alejamos del anillo. En cuanto a la influencia del radio R, si analizamos la geometría de la figura, parece claro que un anillo de mayor radio (insistimos, a igualdad de los restantes factores y, por ello, con la misma carga y mismo valor de z), supone que la componente sobre el eje Z de los vectores $d\vec{E}$ sea más pequeña (al estar estos vectores más inclinados) y, por tanto, el valor de su suma , es decir, $\vec{E}$, disminuirá. Finalmente, cuanto mayor sea el valor de la constante eléctrica K del medio, mayor será E.

Sugerid algún caso límite que podamos contemplar

Parece obvio que para z = 0 (centro del anillo), el campo eléctrico resultante en ese punto deberá ser nulo, ya que los vectores $d\vec{E}$ no tendrán componente según el eje Z, y para cada uno de esos infinitos vectores siempre habrá otro igual y de sentido contrario de forma que ambos se anulen, tal y como se muestra en la figura 3 siguiente:

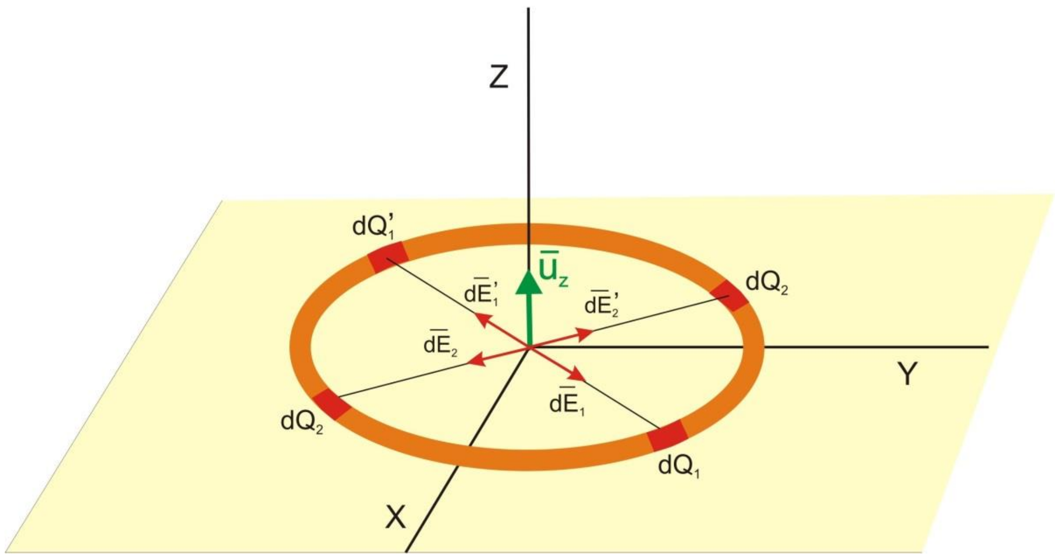


Figura 3

También es lógico pensar que para Q = 0, se cumpla que E = 0, y que cuando z tienda a infinito E tienda a 0.

Sugerid un posible procedimiento para obtener la intensidad del campo eléctrico en A y llevadlo a cabo.

Hemos visto anteriormente que $\vec{E} = \int d\vec{E}_z$, luego, una forma de resolver el problema será tratar de calcular esta integral. Para ello, de la figura 1, podemos ver que:

$dE_z = dE \cdot \cos\theta$

Sustituyendo dE en la igualdad anterior, queda: $dE_z = K \cdot \dfrac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta$

Con lo que: $\vec{E} = \int d\vec{E}_z = \int_0^Q K \cdot \dfrac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_z$

Dado que K, e y θ son constantes, obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{K}{r^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_z \cdot \int_0^Q dQ \rightarrow \vec{E} = K \cdot \frac{Q}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_z$$

Teniendo ahora en cuenta que $\cos\theta = \dfrac{z}{e}$ y que $e = \sqrt{R^2 + z^2}$ nos queda:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \cdot \vec{u}_z \qquad (1)$$

Y simplificando: $\boxed{\vec{E} = K \cdot \dfrac{Q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \vec{u}_z}$ (2)

Sustituyendo valores: $\vec{E} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{10^{-5}}{(0'1^2 + 0'4^2)^{3/2}} \cdot 0'4 \cdot \vec{u}_z \rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = 5'14 \cdot 10^5 \cdot \vec{u}_z}$ N/C

Analizad el resultado literal obtenido

Podemos empezar el análisis comprobando que el resultado es dimensionalmente homogéneo (N/C en ambos lados de la ecuación), lo cual, como sabemos, es una condición necesaria (aunque no suficiente) para que dicho resultado sea correcto.

En segundo lugar, vemos que se cumplen todas las hipótesis enunciadas anteriormente. Así, por ejemplo: E aumenta si Q aumenta y si R disminuye. En principio, la influencia de z no es tan sencilla de ver al encontrarse en numerador y denominador. Sin embargo, si nos fijamos en el denominador de la ecuación (1) o de la (2), nos damos cuenta de que la influencia del valor de z en el denominador es mayor que en el numerador y, por tanto, que, de acuerdo con nuestra hipótesis, si z aumenta, E disminuirá.

El resultado, también contempla los casos límite que habíamos considerado. Vemos, por ejemplo, que si hacemos Q = 0 entonces E = 0 y que lo mismo ocurre si hacemos z = 0.

Además de todo esto, es importante comprobar que el resultado es coherente con lo que cabría esperar que ocurriese cuando el anillo (siempre con la misma carga) se va haciendo cada vez más y más pequeño ya que, en el límite, ese pequeñisimo anillo se podría asimilar a una hipotética carga puntual Q situada en su centro. En efecto:

En la expresión (2) si R → 0 se cumple que: $\vec{E} \rightarrow K \cdot \frac{Q}{z^2}\vec{u}_z$ (3)

Obsérvese que este efecto se da no solo cuando R disminuye (siempre manteniendo constantes el resto de los factores), sino que también ocurre conforme nos vamos alejando del anillo, ya que para distancias grandes se cumple que z >> R, con lo que, en ese caso, se puede despreciar R^2 frente a z^2 y de nuevo, el anillo se podrá considerar como una carga puntual, y aplicar la expresión (3) con tanta mayor exactitud cuanto más alejado se halle A del centro del anillo.

b) Obtención del potencial eléctrico

Para determinar el potencial que crea el anillo cargado, en el mismo punto A, basta con seguir la misma estrategia que para obtener dE, solo que ahora, el ser el potencial una magnitud escalar, el cálculo es más sencillo.

El potencial correspondiente a cada dQ vendrá dado por: dV = K·dQ/e

De modo que el potencial en A debido a todo el anillo de carga se podrá obtener como:

$$V = \int dV = \int_0^Q K \cdot \frac{dQ}{e} = K \cdot \frac{Q}{e}$$

Sustituyendo e en el resultado anterior: $V = K \cdot \frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}}$ (4)

Para los valores de Q, R y z, que plantea el enunciado, se obtiene: V =2’18·10^5 V.

Naturalmente, el resultado anterior también se convierte en el correspondiente a una carga Q puntual, para el caso límite antes contemplado de que R pueda despreciarse frente a z, o, simplemente, cuando R tienda a 0. En efecto:

En la expresión (4) si R → 0 se cumple que: $V \rightarrow K \cdot \frac{Q}{z}$ (5)

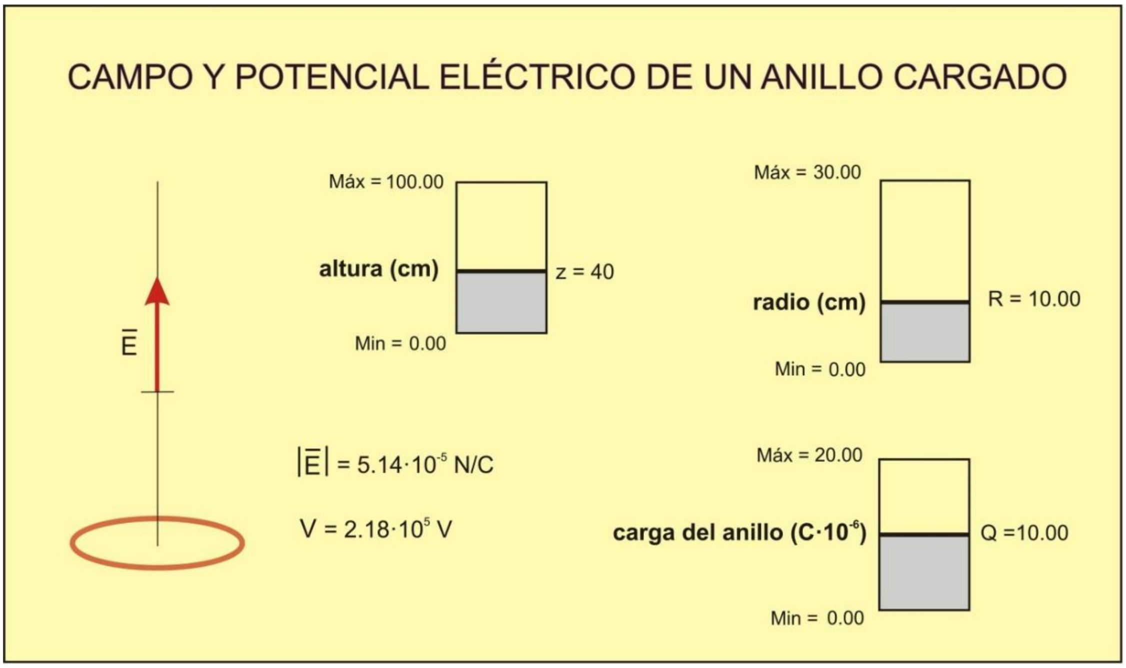
Justificad de nuevo la orientación que tiene el campo eléctrico en cualquier punto del eje z, teniendo en cuenta la expresión literal del potencial eléctrico y su relación con el campo.

Ya hemos visto antes que, simplemente sumando en el punto A los vectores que representan al campo eléctrico generado por cada elemento de carga del anillo, se deduce que la resultante de dicha suma ha de ser un vector de dirección vertical y con orientación positiva sobre el eje z si la carga del anillo es positiva. A la misma conclusión se puede llegar, teniendo en cuenta la relación entre el campo eléctrico y el potencial[1]. En efecto: Al analizar el resultado literal de V (ecuación 4, anterior), vemos que para todo valor de R (es decir, con independencia del tamaño que pueda tener el anillo), cuando la carga del

[1] $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\vec{u}_z$ y, como V no depende más que de z: $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ → $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\vec{u}_z$

anillo es positiva, el valor de V disminuye al aumentar z. Por tanto, E_z ha de ser positiva, lo que implica que el vector $\vec{E}$ resultante (que solo tiene esta componente z) se ha de orientar en sentido positivo de ese eje z, es decir, yendo de mayor a menor potencial.

Para posible refuerzo de este problema, hemos diseñado una animación *Modellus* que lo resuelve. En la pantalla se dispone de tres controladores manuales con los que se pueden modificar los parámetros z, R y Q, y ver así cómo influye cada uno de ellos en el valor de campo y del potencial eléctrico generados el anillo. Los estudiantes pueden usarlos para contratar sus hipótesis y casos límite, así como para analizar el resultado del problema.



La animación está disponible en la web de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).

Considerad, qué nuevos problemas podríamos abordar, partiendo del resultado obtenido para el caso del anillo.

Una estrategia muy útil en el abordaje de problemas de Física consiste en resolver inicialmente situaciones sencillas o simplificadas, con objeto de que las soluciones que se obtienen puedan ser un punto de partida para afrontar seguidamente problemas más complejos. En este sentido, la obtención del campo y el potencial eléctricos generados por un anillo cargado nos va a servir, como veremos en los dos siguientes problemas, para estudiar el campo generado por otros objetos, que podremos considerar como si estuvieran compuestos de anillos elementales. Veremos así el caso de un disco de carga, al que trataremos como infinitos anillos concentricos de radio “r” que se extienden entre r = 0 y r = R siendo R el radio del disco, y también el caso de una superficie esférica, a la que trataremos como infinitos anillos situados uno encima de otro, cuyo radio va aumentando desde 0 hasta un valor máximo R, para luego ir disminuyendo desde R hasta 0, siendo R el radio de la esfera.