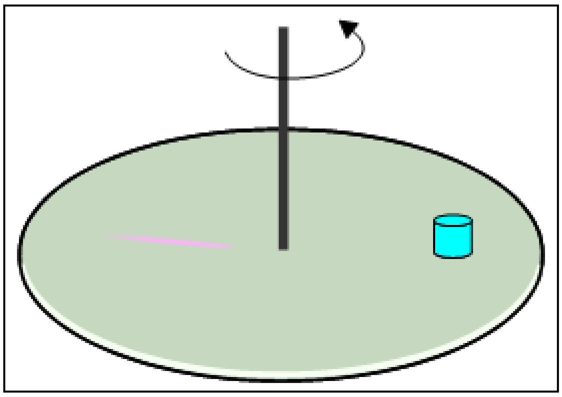


Sobre una plataforma plana, capaz de girar en torno a un eje perpendicular, se deposita un cuerpo de 5 kg de masa, que presenta con la misma un coeficiente de rozamiento μ = 0,8. Se pide:

a) Máxima distancia "*r*" a que puede encontrarse el cuerpo del eje de giro, sin ser lanzado hacia el exterior, si hacemos girar la plataforma a razón de una vuelta por segundo.

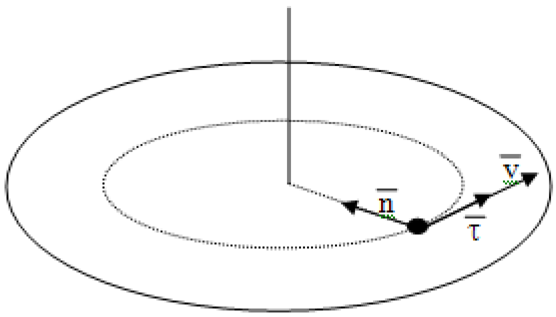
b) Rapidez angular máxima con que podría girar la plataforma sin que deslice el cuerpo, cuando se deposite este sobre dicha plataforma a 2 m del eje de giro.

Planteamiento cualitativo

Si resolviéramos de forma experimental este ejercicio, veríamos que existe una distancia máxima al eje, tal que, para valores superiores a la misma, el cuerpo deslizaría por la superficie desplazándose hacia el exterior, mientras que para valores inferiores, el cuerpo permanecería en el lugar en que se le sitúe, describiendo, al igual que cualquier punto del disco, un movimiento circular uniforme. Para que esto último suceda, será necesario que el cuerpo se encuentre sometido a la acción de una fuerza resultante según la dirección del radio y dirigida hacia el centro de la plataforma.

¿A qué se debe esa fuerza?

Consideremos el objeto en un punto cualquiera de su trayectoria con un movimiento circular y uniforme alrededor del eje de giro. En dicho punto tendrá una velocidad $\vec{v}$ tangente a la trayectoria. Si no continúa moviéndose con dicha velocidad en la misma dirección y sentido, es porque la fuerza resultante sobre él es siempre perpendicular a la trayectoria y dirigida hacia el centro de curvatura, haciendo cambiar continuamente la dirección del vector velocidad.



Dicha fuerza, en la situación descrita, solo puede ser la fuerza de rozamiento, que se opone al deslizamiento del cuerpo sobre el disco, ya que el resto de fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo (concretamente el peso y la reacción del plano) son perpendiculares a la plataforma.

Emisión de hipótesis

En principio, cabe pensar que el radio máximo buscado r_{max}, pueda depender del coeficiente de rozamiento μ, de la masa m del cuerpo, de la rapidez angular w y de la intensidad de la gravedad g, de modo que, a igualdad de los restantes factores, cabe esperar que r_{max} aumente cuanto mayor sea μ, cuanto mayor sea m, cuanto menor sea w y cuanto mayor sea g.

También se puede imaginar algún caso límite como. Por ejemplo: si μ valiese 0, el valor de r también sería 0.

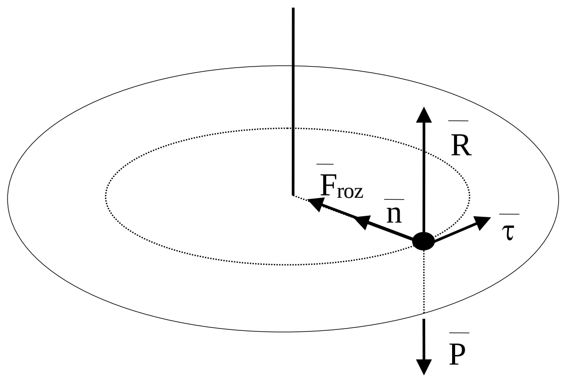
Estrategias de resolución y resolución

Dado que se trata de un movimiento circular y uniforme y que en la expresión de la fuerza centrípeta aparece el radio de la trayectoria, una posible estrategia será aplicar la ecuación fundamental de la dinámica al cuerpo en cuestión y tratar de obtener el radio que corresponde a cuando la fuerza de rozamiento toma su valor máximo.

Las fuerzas que actúan sobre el objeto cuando está describiendo un movimiento circular uniforme solidariamente a la plataforma, son el peso $\vec{P}$, la reacción del plano $\vec{R}$ y la fuerza de rozamiento con la superficie $\vec{F}_{roz}$ (si no hubiese rozamiento sería imposible que el objeto pudiera girar estando sobre la plataforma), de modo que podemos expresar la fuerza resultante sobre el cuerpo en cualquier instante del giro como:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{roz}$$

Por otra parte, al tratarse de un movimiento circular uniforme, la fuerza resultante deberá de tener la dirección y sentido del vector unitario $\vec{n}$.



Expresando en componentes intrínsecas la ecuación fundamental de la dinámica:

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{\tau} + m \cdot a_n \cdot \vec{n}$$

y sustituyendo nos queda:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{roz} = m \cdot a_n \cdot \vec{n}$$

Si analizamos la última ecuación, nos daremos cuenta de que la única posibilidad de que la fuerza resultante tenga la misma dirección y sentido que $\vec{n}$, es que $\vec{P} + \vec{R} = 0$, con lo que tendremos:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_{roz} = m \cdot a_n \cdot \vec{n}$$

Todo sucede, pues, como si la única fuerza actuante fuera la fuerza de rozamiento que, además, está dirigida hacia el centro de la circunferencia descrita. Esta es la fuerza que obliga al cuerpo a describir un MCU en el que continuamente está cambiando la dirección de la velocidad sin que cambie su módulo.

Por otra parte, sabemos que la fuerza de rozamiento por deslizamiento puede tomar infinitos valores entre 0 y un valor máximo dado por $F_{roz} = \mu \cdot N$ (siendo N el módulo de la fuerza normal que el objeto ejerce sobre la superficie y μ el coeficiente de rozamiento correspondiente).

Si trabajamos escalarmente con la componente normal:

$F_{res\,n} = F_{roz} = m \cdot a_n = m \cdot v^2/r$ y como $v = w \cdot r$ nos queda que: $F_{roz} = m \cdot w^2 \cdot r$

La expresión obtenida nos dice que cuanto mayor sea r (a igualdad de los restantes factores) mayor será la fuerza de rozamiento necesaria para que el objeto siga girando sobre la plataforma alrededor del eje con movimiento circular y uniforme.

¿Cómo podríamos calcular el máximo valor de r posible?

El mayor radio posible será aquel que corresponda al valor máximo que puede tomar la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y la plataforma. Dicho valor máximo viene dado, como ya sabemos, por:

$$F_{roz\,max} = \mu \cdot N = \mu \cdot R = \mu \cdot P = \mu \cdot m \cdot g$$

Sustituyendo dicho valor máximo en $F_{roz} = m \cdot w^2 \cdot r$ podemos escribir:

$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot w \cdot r_{max}$ y despejando: $\boxed{r_{\max} = \dfrac{\mu \cdot g}{w^2}}$

Y sustituyendo los valores numéricos correspondientes, se obtiene: $r_{max} = 0{,}2$ m

Análisis del resultado

Podemos analizar la expresión literal del resultado comprobando que es dimensionalmente homogénea (L = L) y que contempla algunos casos evidentes como, por ejemplo, que cuanto mayor sea el coeficiente de rozamiento mayor será el radio máximo permitido y que al aumentar la rapidez angular de la plataforma disminuiría el radio máximo. En este último caso, es posible darse cuenta, también, de que, al estar *w* elevada al cuadrado, influye más que los restantes factores, de forma que cuando w se duplica el radio máximo no se hace la mitad sino cuatro veces más pequeño.

El resultado muestra también que r_{max} no depende de la masa del cuerpo. Para entender por qué ocurre esto conviene analizar con cierto detalle la expresión inmediatamente anterior al resultado, ya que, hasta ese momento del mismo, la masa sí aparecía en nuestro desarrollo:

$$\mu \cdot mg = m \cdot w^2 \cdot r_{max}$$

Vemos entonces que cuanto mayor sea la masa del cuerpo, mayor es también la fuerza de rozamiento máxima ($F_{roz\,max} = \mu \cdot m \cdot g$) y, por este motivo, mayor resulta también el radio máximo. Este hecho viene a confirmar la hipótesis que se suele formular mayoritariamente al plantear este problema. Se trata de una hipótesis correcta, pero, como vamos a ver, incompleta. En efecto: lo que se considera realmente en este caso es la influencia de la masa gravitatoria (m_g) del cuerpo, ya que cuanto mayor sea esta, mayor es su peso ($P = m_g \cdot g$), mayor es, en consecuencia, la reacción normal del plano sobre el cuerpo (igual aquí al peso) y, finalmente, mayor es la fuerza de rozamiento máxima. Sin embargo, al mismo tiempo también es cierto que cuanto mayor sea la inercia o masa (inercial) del cuerpo (m_i), mayor es la fuerza resultante ejercida sobre él, que aquí coincide con la fuerza centrípeta ($F_c = F_{res\,n} = m_i \cdot w^2 \cdot r$). Como vemos, ambos factores se compensan y, por este motivo, la masa no influye en la determinación de r_{max}.

En cuanto a la segunda cuestión planteada en el enunciado, el procedimiento a seguir es el mismo que el que acabamos de realizar, pero considerando ahora un valor de r dado (2 m) y una w que va aumentando hasta alcanzar un valor máximo w_{max} a partir del cual el cuerpo deslizaría, se obtiene, como es lógico:

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{r}}$$

Sustituyendo valores numéricos, se obtiene: w_{max} = 1,98 rad/s

Nuevas perspectivas

Podemos, por ejemplo, plantearnos aquí alguna cuestión nueva pero que guarde relación con las anteriores, como, por ejemplo:

¿Cómo cambiaría el resultado anterior en el caso de que el objeto estuviese sujeto por un hilo, de 2 m de longitud, al centro de giro?

(Contestad esta nueva pregunta suponiendo que el hilo soporta como máximo una tensión de 60 N antes de romperse).

En este caso, la fuerza resultante que se requiere para que el cuerpo gire con movimiento circular uniforme será la suma de la fuerza de rozamiento y de la fuerza que realice la cuerda sobre el cuerpo (que como máximo puede valer 60 N). Dicha fuerza deberá de tener la dirección y sentido del vector unitario $\vec{n}$.

Si el cuerpo gira con una rapidez angular w tal que la fuerza de rozamiento F_{roz} es suficiente para suministrarle la fuerza normal requerida, la cuerda no hará ninguna fuerza (la tensión de la cuerda será nula). Pero si la w es tan elevada que el valor máximo de la fuerza de rozamiento es inferior al de dicha fuerza normal, la diferencia será aportada por la cuerda al ponerse en tensión (aunque como máximo solo pueda suministrar 60 N).

El planteamiento del ejercicio será, pues, similar al anterior, de modo que, trabajando con las componentes intrínsecas de las fuerzas presentes, tendremos ahora que:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{roz\ max} + \vec{T}$$

Dado que $\vec{P}$ y $\vec{R}$ se anulan, podemos plantear directamente que: $\vec{F}_{res} = \vec{F}_{roz\ max} + \vec{T}$

y como se trata de un movimiento de trayectoria conocida nos convendrá expresar todas las fuerzas en componentes intrínsecas:

$\vec{F}_{res\,t} = m \cdot a_t \rightarrow a_t = 0$ (como corresponde a un movimiento uniforme)

$\vec{F}_{res\,n} = m \cdot a_n \rightarrow F_{roz\,max} + T + m \cdot a_n = m \cdot w^2 \cdot r$

Despejando nos queda: $w = \sqrt{\frac{F_{roz\,max}+T}{m \cdot r}}$

La mayor rapidez angular con que la masa *m* podrá girar con movimiento circular uniforme alrededor del eje y a una distancia *r* del mismo, la podemos obtener a partir de la expresión anterior, simplemente sustituyendo la tensión por su valor máximo y teniendo en cuenta que $F_{roz\ max} = \mu \cdot N = \mu \cdot R = \mu \cdot P = \mu \cdot mg$ obtenemos finalmente:

$$w_{max} = \sqrt{\frac{\mu \cdot m \cdot g + T_{max}}{m \cdot r}}$$ o lo que es equivalente: $$w_{max} = \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{r} + \frac{T_{max}}{m \cdot r}}$$

Y sustituyendo valores numéricos: $w_{max} = 3{,}1$ rad/s

Podemos ahora analizar el resultado literal obtenido. Si así lo hacemos veremos que ahora la masa sí que es un factor influyente en resultado del problema, debido a que ahora no se compensan las influencias de la masa inercial y la masa gravitatoria [esto es así porque, al contrario que ocurre con la fuerza máxima de rozamiento, la tensión de la cuerda no tiene nada que ver con la masa (gravitatoria) del cuerpo] y que la rapidez máxima permitida será tanto mayor cuanto mayor sea la tensión máxima que soporta la cuerda… También vemos que, en el caso particular de que dicha tensión máxima fuese nula (lo que equivale a que no haya cuerda), el resultado se convierte en el anterior. Por otra parte, el resultado numérico, como es lógico, nos da un valor mayor para la rapidez angular máxima que cuando el cuerpo no estaba sujeto por ningún hilo.

El resultado nos permite también contestar también a una nueva pregunta interesante. Concretamente:

¿Cuál sería el valor de w_{max} si hubiese cuerda, pero no rozamiento?

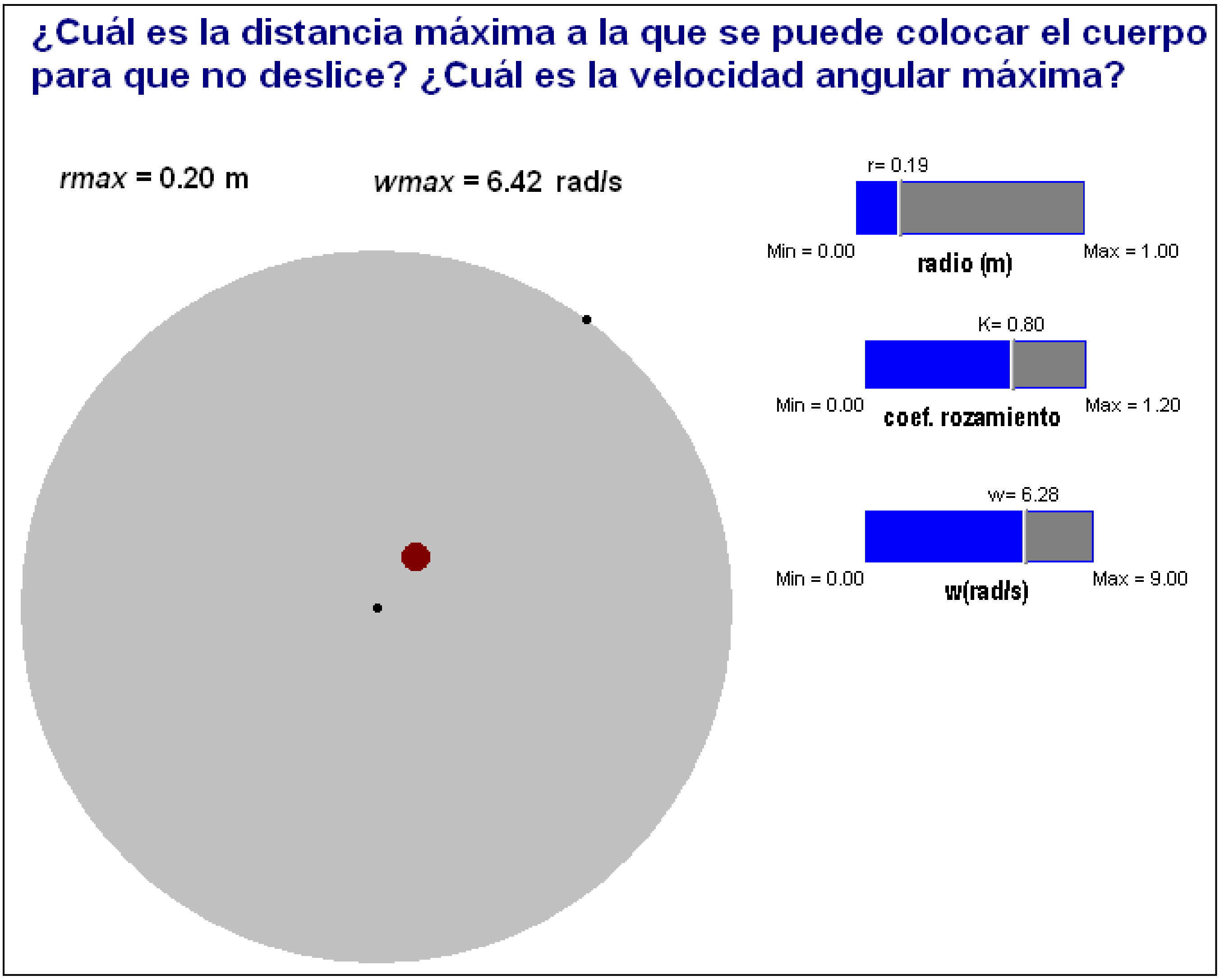
Bastaría hacer $\mu = 0$ en el resultado anterior para contestarla.

Refuerzo:

Los alumnos pueden trabajar con una animación *Modellus*, que hemos elaborado sobre este problema. En la pantalla se dispone de tres controladores manuales con los que se pueden modificar las condiciones iniciales, por tanto, los valores de los tres parámetros que influyen en el radio máximo: el coeficiente de rozamiento, la velocidad angular y el radio. Después de introducir los valores que se deseen, la animación calcula (a partir de ellos) los valores del radio máximo y de la velocidad angular máxima a los que puede girar la plataforma sin que el cuerpo sea despedido de ella. A partir de aquí, al hacerla correr, el cuerpo rota solidariamente con la plataforma si lo situamos a una distancia del centro inferior al radio máximo y/o si hacemos rotar a la plataforma con una velocidad angular inferior a la velocidad angular máxima. En caso contrario, la animación muestra cómo el cuerpo es expulsado de la plataforma en la dirección tangencial.

La imagen siguiente corresponde a una secuencia de dicha animación después de haber introducido los mismos valores usados en esta resolución del problema y colocado el cuerpo a una distancia del centro ligerísimamente inferior al radio máximo. En estas condiciones el cuerpo se mantiene encima de la plataforma girando solidariamente con ella.

La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm


¿Cuál es la distancia máxima a la que se puede colocar el cuerpo para que no deslice? ¿Cuál es la velocidad angular máxima?
rmax = 0.20 m
wmax = 6.42 rad/s
r= 0.19
Min = 0.00
radio (m)
Max = 1.00
K= 0.80
Min = 0.00
coef. rozamiento
Max = 1.20
w= 6.28
Min = 0.00
w(rad/s)
Max = 9.00