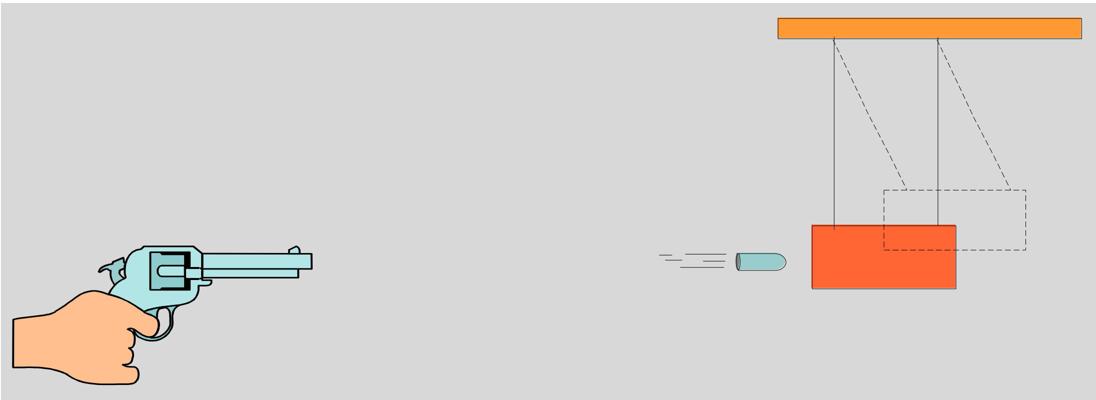
17. Se dispara horizontalmente una bala de 15 g sobre un bloque de 3 kg que cuelga del techo suspendido por unos hilos de masa despreciable, de tal modo que la bala queda incrustada en el bloque y el conjunto oscila hasta alcanzar una altura de 10 cm por encima de su posición inicial. ¿Con qué velocidad incidió la bala en el bloque?

Planteamiento

Este problema hace referencia a un "péndulo balístico" que consiste en un procedimiento para medir la velocidad de cualquier proyectil lanzado contra él quedando incrustado. Un péndulo de este tipo suele consistir en un gran bloque de madera suspendido de dos cuerdas, como se indica en la figura siguiente:



La bala realiza un choque directo contra el bloque con una velocidad $\vec{v}_1$ quedando empotrada en él (choque perfectamente inelástico). A consecuencia del choque, el conjunto formado por la bala y el bloque oscila ascendiendo hasta alcanzar una cierta altura h respecto al nivel inicial.

Hipótesis

En principio, podemos pensar que el valor de la rapidez v_1 con que impactó la bala dependa de la masa m_1 de la bala, la masa m_2 del bloque, la intensidad g de la gravedad y la altura máxima (sobre el nivel inicial) alcanzada por el conjunto:

$$v_1 = f\,(m_1, m_2, g, h)$$

Concretamente, cabe esperar que la rapidez con que incidió la bala en el bloque resulte tanto mayor cuanto (manteniendo el resto de factores constantes) mayor haya sido la altura máxima alcanzada. También es lógico pensar, que, si la masa del bloque aumentase y quisiéramos alcanzar la misma altura, v_1 tendría que ser mayor y lo mismo tendría que ocurrir si la masa de los proyectiles, fuese cada vez menor o si la intensidad gravitatoria aumentase (manteniendo todo lo demás igual).

También podemos pensar que, para un valor dado de v_1, cuanto mayor sea la masa m_2 del bloque, menor altura máxima se alcanzará, etc.

Podemos, incluso, imaginar algún caso límite, de fácil interpretación. Por ejemplo, si $h = 0 \rightarrow v_1 = 0$, y si m_2 fuese nula, toda la energía cinética inicial de la bala se transformará en energía potencial gravitatoria, con lo que debería obtenerse: $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Estrategias de resolución y resolución

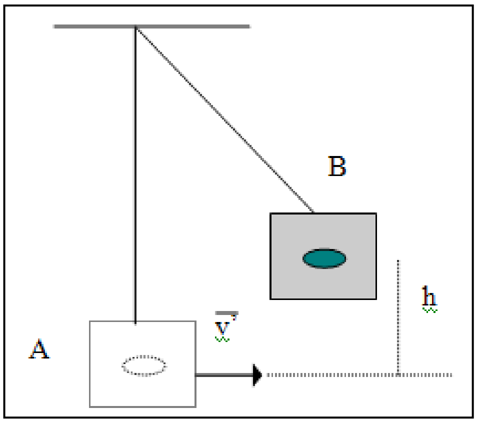
¿Cómo podríamos calcular la rapidez con que incide la bala sobre el bloque?

Si consideramos el sistema formado por la bala y el bloque, podemos razonar que las fuerzas que se ejercen en la horizontal: fuerza que sobre el bloque hace la bala y fuerza que sobre la bala hace el bloque, son una pareja de acción-reacción y que las que se ejercen en la vertical (el peso y la tensión del hilo) tienen el mismo módulo y sentidos contrarios. Por tanto, el valor de la fuerza resultante sobre el sistema bala-bloque es 0. Por tanto, si tomamos como sentido positivo el del movimiento de la bala, podemos admitir que la cantidad de movimiento según la horizontal es la misma al comienzo del choque que justo al finalizar el mismo, con lo que (tomando como sentido positivo el del movimiento de la bala) podemos escribir:

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

siendo v' la rapidez con que sale el conjunto bloque-bala después del choque. Dicha rapidez es, en principio desconocida, por lo que no podremos hallar v_1 mientras no la determinemos.

¿Cómo podemos hallar la rapidez v' del conjunto bala-bloque justo después del choque?



Considerando el conjunto formado por el bloque y la bala, podemos hallar el trabajo resultante sobre el mismo desde justo después del impacto (situación A) hasta que alcanza la altura máxima h (situación B).

A lo largo de ese trayecto, actúan la fuerza peso y la tensión del hilo. No obstante, como la tensión es en todo momento perpendicular a la trayectoria, no realiza ningún trabajo y podemos expresar el trabajo resultante como:

$$W_{resA}^{B} = W_{PA}^{B} = \Delta Ec_A^B$$

Como la fuerza peso es conservativa, se cumplirá que: $W_P = -\Delta Ep$, de modo que:

$$\Delta Ec_A^B = \Delta Ep_A^B \quad \text{o lo que es lo mismo: } \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\cdot v^2 = (m_1 + m_2)\cdot g \cdot h$$

Es decir: toda la energía cinética con que sale el conjunto bloque-bala, se halla en forma de energía potencial gravitatoria en el instante en que alcanza la máxima altura h (en el cual la rapidez es momentáneamente nula). De la ecuación anterior podemos obtener v' como:

$$v' = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la ecuación que expresa la conservación de la cantidad de movimiento y despejando v_1 nos queda que:

$$v_1 = \left[1 + \frac{m_1}{m_2}\right] \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \rightarrow v_1 = 284{,}2 \text{ m/s}$$

Análisis del resultado

Analizando el resultado literal obtenido, vemos que además de ser dimensionalmente homogéneo, contempla las hipótesis y casos límite considerados al comienzo. Es posible ahora ir un poco más allá y preguntarnos:

¿Cuánta energía cinética se pierde a causa del choque?

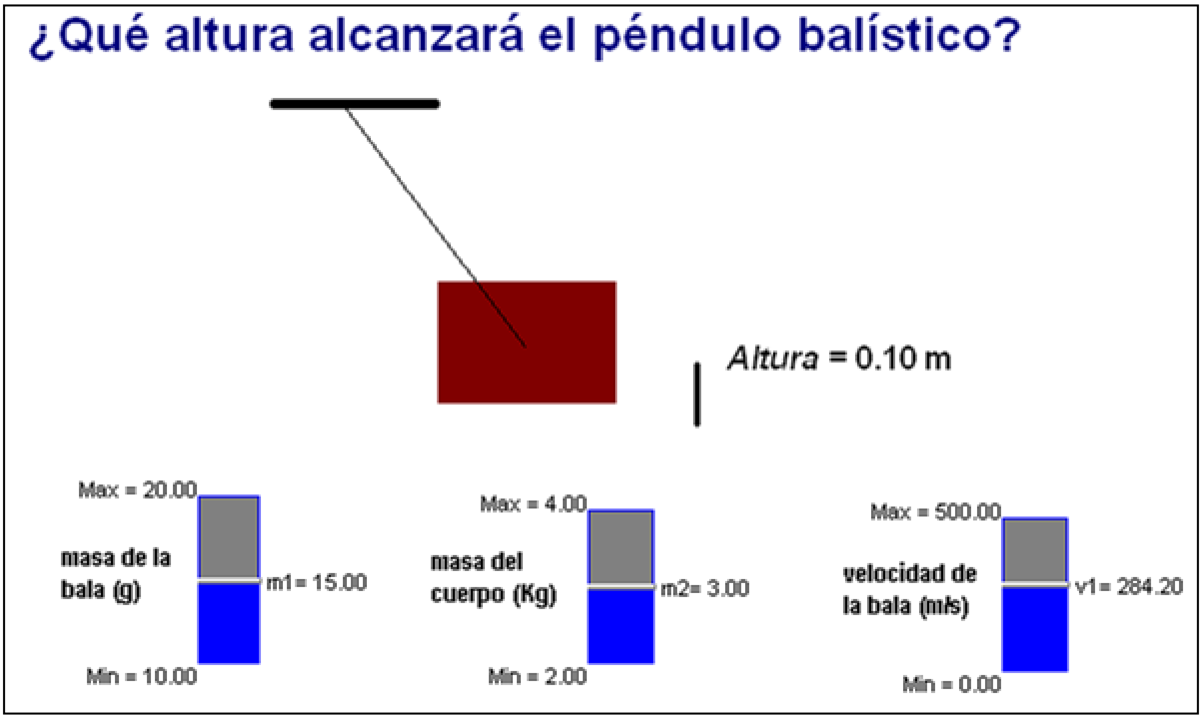
Para calcular la variación de energía cinética que sufre el sistema formado por el bloque y la bala a consecuencia del choque, basta con restar la energía cinética inicial de la bala a la energía cinética del sistema inmediatamente después del choque, con lo que:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v'^2 - \frac{1}{2}(m_1 \cdot v_1^2) = 3{,}015 - 606{,}2 = -603{,}19 \text{ J}$$

Naturalmente, dicha energía no ha desaparecido, sino que se halla ahora como energía interna asociada a las partículas submicroscópicas que forman la bala y el bloque. Conviene resaltar el gran porcentaje de la energía cinética inicial del sistema que sufre esta transformación (del orden del 99,5 %) o lo que es lo mismo: solo el 0,5 % de la energía cinética con que la bala incide en el bloque, se convierte en energía potencial gravitatoria del conjunto formado por el bloque y la bala cuando este alcanza la máxima altura h. Este resultado permite comprender lo incorrecto que sería resolver este problema igualando la energía cinética de la bala a la potencial gravitatoria del conjunto.

Refuerzo

Para reforzar los conceptos involucrados en este problema, hemos elaborado una animación *Modellus* que lo simula, después de dar la vuelta al enunciado del problema y preguntar qué altura alcanzará el péndulo balístico. A la vista del desarrollo anterior, vemos que dicha altura ha de depender de la velocidad de la bala y del resto de parámetros que hemos considerado (masa de la bala, masa del bloque y g). En la pantalla de la animación hemos colocado controladores manuales para poder modificar estos parámetros y ver cómo influyen las modificaciones en el resultado del problema. La imagen adjunta corresponde al estado final cuando todos los valores iniciales coinciden con los de la resolución literal anterior.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htmm