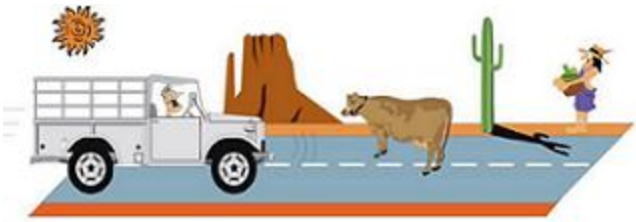
Sobre un vehículo de 1000 kg de masa, que se desplaza con una rapidez de 108 km/h, actúa una fuerza de frenado de 7500 N. ¿Qué distancia recorrerá hasta pararse?

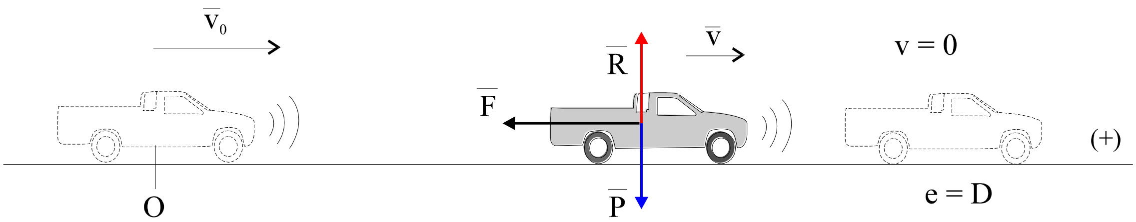


Considerad cuál puede ser el interés de la situación problemática abordada

El cálculo de la distancia que recorre un móvil hasta pararse tiene un indudable interés, por ejemplo, en el aterrizaje de aviones o en el tráfico de vehículos en general (por carretera y ciudad), en donde interesa asegurar una distancia mínima de frenada para evitar accidentes, lo que lleva a limitar la velocidad máxima, guardar una cierta distancia entre vehículos, perfeccionar los sistemas de frenado, etc.

Comenzad por un estudio cualitativo de la situación, intentando acotar y definir de manera precisa el problema, explicitando las condiciones que se consideran imperantes, etc.

En este problema un móvil lleva una cierta velocidad inicial y frena hasta que se para, pidiéndonos la distancia que recorre durante este proceso. Las fuerzas que actúan sobre el móvil son tres: el peso $\vec{P}$, la fuerza normal $\vec{R}$ ejercida por la carretera y la fuerza $\vec{F}$ de frenado ejercida por el sistema de frenado. Las dos primeras son perpendiculares a la trayectoria y se anulan entre ellas, mientras que $\vec{F}$ es tangente. Para simplificar el problema, supondremos que la fuerza de frenado es constante, de modo que el movimiento será rectilíneo y uniformemente acelerado. Como la fuerza de frenado tiene sentido contrario al movimiento, la rapidez inicial del móvil irá disminuyendo linealmente desde v_0 (cuando empieza a frenar) hasta 0 (instante en que se para). En términos de trabajo y energía se podría describir diciendo que el trabajo realizado por la fuerza de frenado tiene como efecto disminuir la energía cinética hasta hacerla igual a 0.



La figura anterior representa un esquema de la situación, en donde podemos ver el punto que se toma como origen de espacios, las fuerzas que se ejercen sobre el móvil y cómo la velocidad del mismo se va haciendo cada vez más pequeña hasta que finalmente el móvil se para.

En el problema se pide la distancia D que recorre el móvil desde que comienza a frenar hasta que se para, lo cual, si tomamos como origen de espacios el punto O de la figura y como sentido positivo el del movimiento, equivale a determinar el valor de "e" en el instante en que la rapidez valga 0. En términos de trabajo y energía dicha distancia coincidirá con el módulo del desplazamiento experimentado por el móvil desde que comienza a frenar hasta que se para.

Emitid hipótesis fundadas sobre los factores de los que puede depender la magnitud buscada y sobre la forma de esta dependencia, imaginando, en particular, casos límite de fácil interpretación física.

En el ejemplo que nos ocupa, podemos pensar que la distancia D, va a depender de la rapidez a la que vaya el móvil en el momento que empiece a frenar, de modo que (a igualdad de los restantes factores) cuanto mayor sea ésta, más grande será la distancia que recorrerá hasta pararse. Otro factor que ha de influir es la fuerza resultante de frenado que actúe sobre el vehículo. Parece evidente, que cuanto mayor sea dicha fuerza menor distancia precisará para pararse (siempre a igualdad del resto de los factores). También podemos pensar en la influencia de la masa. Algunas personas creen que si tiene una masa muy grande se parará antes, pero si reflexionamos un poco nos daremos cuenta que sería al contrario, ya que la masa que estamos considerando en este razonamiento representa la inercia del vehículo móvil (masa inercial) y, por tanto, es lógico suponer que costará más parar a un camión que vaya a 100 km/h que a una motocicleta a la misma velocidad, puesto que el primero tiene mayor inercia que la segunda. (En ocasiones se señala también el tiempo que dure la frenada, sin embargo este factor está implícito ya en los factores enunciados). Así pues, la distancia recorrida hasta pararse podrá expresarse en función de las magnitudes citadas:

$$D = D\,(v_0, m, F)$$

Las magnitudes anteriores (v_0, m, F) constituyen, de hecho, los datos que se suministran en el enunciado del problema. Además de aventurar la forma en que cabe esperar que influyan en D, podemos considerar alguna condición límite evidente, como por ejemplo, que si la fuerza resultante de frenado fuese nula no se pararía, es decir, D sería infinita o que si $v_0 = 0$, D tendrá que valer 0 (ya estaría parado)..

Elaborad y explicitad posibles estrategias de resolución ***antes*** *de proceder a ésta, evitando el puro ensayo y error. Buscad distintas vías de resolución, para posibilitar la contrastación de los resultados obtenidos y mostrar la coherencia del cuerpo de conocimientos de que se dispone.*

Una posible estrategia de resolución es utilizar las ecuaciones cinemáticas y dinámicas correspondientes al movimiento del vehículo:

Al ser la trayectoria fija y conocida podemos realizar un tratamiento escalar para resolver el problema. Si escogemos como origen de espacios el punto donde comienza a frenar, origen de tiempos el instante en que lo hace y sentido positivo el del movimiento, tendremos:

Aceleración tangencial del móvil (constante):	$a_t = -F/m$	(1)
Rapidez del móvil en cualquier instante t del movimiento:	$v = v_0 + a\,t$	(2)
Posición del móvil en cualquier instante t del movimiento:	$e = e_0 + v_0 t + \frac{a\,t^2}{2}$	(3)

La determinación de la distancia D (e en el instante en que v = 0) podríamos efectuarla mediante la ecuación del movimiento (3), si supiésemos el instante t en que el móvil se para. Éste último lo podemos hallar fácilmente haciendo v = 0 en la ecuación (2) y despejando t. Para ello hemos de calcular previamente la aceleración mediante la ecuación (1)[1].

Otra posibilidad es utilizar la ecuación que relaciona el trabajo realizado por la fuerza resultante a lo largo del desplazamiento que abarca el frenado, con la variación de energía cinética (teniendo en cuenta que la energía cinética final será 0) y despejar el módulo del desplazamiento, que en este caso coincide con la distancia recorrida D.

Realizad la resolución propiamente dicha.

[1] Insistimos en la necesidad de escribir los datos (en este caso F) con el signo correspondiente y que esto solo se haga una vez (o bien en las letras, como hemos hecho aquí) o bien en los números.

De las estrategias expuestas vamos a desarrollar la segunda (basada en consideraciones de trabajo y energía), designando como estado A el que corresponde a la situación del móvil cuando empieza a frenar (v_A = 108 km/h = 30 m/s), y como B cuando se para (su velocidad se hace 0).

La ecuación que relaciona el trabajo realizado por la fuerza resultante con la variación de energía cinética es:

$$W_{res\,A}^{\;\;B} = \Delta Ec_A^B = Ec_B - Ec_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

En nuestro caso, la fuerza resultante es la de frenado $\vec{F}$ (tangente a la trayectoria), que siempre tiene sentido contrario al movimiento, la energía cinética en la situación B es 0 (se para) y el módulo del desplazamiento coincide con la distancia recorrida D. Introduciendo estas condiciones en la ecuación anterior:

$$-F \cdot D = -\frac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{y despejando D obtenemos:} \quad D = \frac{mv_A^2}{2F}$$

Ahora, basta sustituir los datos numéricos y operar para obtener D = $\frac{1000 \cdot 900}{15.000}$ = 60 m

Analizad cuidadosamente los resultados a la luz de las hipótesis elaboradas y, en particular, de los casos límite considerados.

Si analizamos el resultado del problema que estamos resolviendo, podemos darnos cuenta en primer lugar que el valor numérico obtenido (60 m) parece normal (está de acuerdo con nuestras experiencias cuando frena un automóvil). Si hubiese sido, por ejemplo, 0’6 m o 6000 m habría que dudar y revisar el problema.

Si nos detenemos en el resultado literal: $D = \frac{mv_A^2}{2F}$

podemos ver que la ecuación es dimensionalmente homogénea (dimensiones de una longitud a ambos lados de la igualdad). Ello no es garantía de que el ejercicio esté bien resuelto, pero si no se diese dicha homogeneidad sí que sería indicativo de alguna equivocación. Por otra parte, en el resultado se contemplan las hipótesis de partida y es fácil ver que cuando la masa y/o la rapidez inicial aumentan (para una cierta fuerza de frenado), la distancia D necesaria para pararse también aumenta, que si la fuerza F aumenta (manteniendo fijas la masa y rapidez inicial) D disminuirá (conveniencia de diseñar sistemas de frenada apropiados) o que si v_A = 0, la distancia D = 0, etc.

Estas conclusiones se tienen muy en cuenta para establecer limitaciones sobre el tráfico rodado y sería muy bueno que los ciudadanos también las conocieran para obrar en consecuencia. Obsérvese, por ejemplo, que si la rapidez inicial con que se mueve un vehículo se duplica, la distancia que recorre hasta pararse no se hace también el doble sino **4 veces mayor**, ya que dicha rapidez inicial está elevada al cuadrado, es decir, es la variable que más influye. Por ello, en contra de lo que piensan muchas personas, cualquier incremento (aunque sea relativamente pequeño) de la velocidad por encima del límite establecido por la norma, aumenta de manera significativa el peligro.

Otra cuestión importante a tener en cuenta es el hecho de que (mientras no se bloqueen las ruedas), la distancia que recorre un vehículo después de pisar el freno es, como hemos visto, proporcional a su masa, lo que obviamente justifica la necesidad de limitar de forma particular la velocidad máxima de los vehículos de gran tonelaje.

Después de realizar estos análisis, si queremos, podemos resolver de nuevo el problema mediante la otra estrategia (basada en un tratamiento puramente cinemático-dinámico) y comprobar que el resultado es el mismo.

Considerar las perspectivas abiertas por la investigación realizada contemplando, por ejemplo, el interés de abordar la situación a un nivel de mayor complejidad o considerando sus implicaciones teóricas (profundización en la comprensión de algún concepto) o prácticas (posibilidad de aplicaciones técnicas). Concebir, muy en particular, nuevas situaciones a investigar, sugeridas por el estudio realizado.

Al igual que ocurre en una verdadera investigación, los resultados pueden ser origen de nuevos problemas. Sería conveniente que los estudiantes (y los profesores) llegasen a considerar este aspecto como una de las derivaciones más interesantes de la resolución de problemas, poniendo en juego de nuevo su creatividad.

En el caso que estamos considerando, podemos plantearnos, a la luz del resultado obtenido, nuevos problemas de interés práctico, como por ejemplo, *qué fuerza se ejerce sobre un vehículo en un choque frontal contra un obstáculo*.

Para determinarla basta con despejar F en la ecuación anterior, teniendo en cuenta que si el obstáculo es fijo y grande (por ejemplo un muro) la distancia recorrida se reduce a lo que da de sí la carrocería del vehículo. Así si suponemos D = 2 m, la fuerza sería:

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{mv_A^2}}{2\mathrm{D}} = \frac{1000 \cdot 900}{4} = 225000\ \mathrm{N}$$

Esta fuerza ejercida sobre el coche resulta ser casi igual que el peso de 23000 kg, lo que permite comprender las consecuencias fatales de un choque frontal a esa velocidad. El problema se agrava cuando en lugar de ser contra un muro es contra otro vehículo que va en sentido contrario (en cuyo caso v_A sería la suma de los módulos de ambas velocidades).

Otra cuestión interesante es *qué es lo que ocurriría en caso de que las ruedas se bloqueasen y dejasen de girar.*

En la nueva situación planteada, la fuerza resultante de frenado será la fuerza de rozamiento máxima por deslizamiento entre las ruedas y la carretera, cuyo módulo viene dado por la expresión: $F_{roz} = \mu \cdot N$ siendo N el módulo de la componente normal de la fuerza que el vehículo ejerce sobre la carretera (cuyo valor, en este caso, coincide con el del peso, mg).

Sustituyendo F por $F_{roz} = \mu \cdot mg$, el resultado se convierte en:

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{mv_A^2}}{2\mathrm{F}} = \frac{mv_A^2}{2\mu mg} = \frac{v_A^2}{2\mu g}$$

Este último resultado nos muestra que ningún vehículo puede frenar y parar en el acto, sino que siempre recorrerá una distancia, D, tanto mayor, cuanto menor sea el coeficiente de rozamiento con el suelo y también cuanto mayor sea la velocidad en el momento de frenar. El coeficiente de rozamiento al deslizamiento (dinámico) depende fundamentalmente del material y el estado de los neumáticos, así como del estado de la carretera, el cual puede variar enormemente por las condiciones climatológicas. En la tabla siguiente hemos calculado el valor de D para diferentes condiciones de la carretera, tomando como velocidad inicial del vehículo, la planteada en el enunciado del problema (30m/s). Los coeficientes de rozamiento son aproximados (fuente Wikipedia) y corresponden al caso más favorable en el que las ruedas del vehículo (goma) sean nuevas.

Resultado del problema para diferentes condiciones de la carretera				
Estado del asfalto	Hielo	Carretera mojada	Asfalto usado (seco)	Asfalto nuevo (seco)
μ	0.1	0.4	0.6	0.9
D (m)	400	112.5	75	50

Como vemos, al ser la velocidad inicial del vehículo bastante elevada (30m/s=108Km/h) la distancia recorrida no es pequeña en ningún caso, pero se eleva considerablemente cuando empeoran las condiciones. Resulta evidente que hay que reducir bastante la velocidad sobre un pavimento mojado y muchísimo más si hay placas de hielo.

Una cuestión importante a analizar en este caso, es el hecho la masa del vehículo no influye en estos resultados y conviene detenerse a ver por qué. Si se han diferenciado antes en clase los conceptos de masa inercial y masa gravitatoria, podemos plantear ahora la siguiente cuestión:

Analizad por qué cuando la fuerza de frenado es la fuerza máxima de rozamiento al deslizamiento, la distancia de frenado no parece depender de la masa del vehículo. A tal fin, interpretad la influencia de la masa gravitatoria y de la masa inercial en este caso.

Como ya hemos visto, cuanto mayor sea la masa inercial del vehículo, mayor será la distancia que recorra en la frenada y así se entiende que un vehículo con mayor inercia (por ejemplo, un camión) resulta más difícil de detener que otro más ligero (por ejemplo, un utilitario). Ahora bien, en este caso en el que hemos supuesto las ruedas se bloquean y que la fuerza de frenado es la fuerza de rozamiento al deslizamiento, también hemos de tener en cuenta que cuanto mayor sea la masa gravitatoria de ese mismo vehículo, mayor será su peso y, por tanto, mayor será esa fuerza máxima de rozamiento al deslizamiento. Así pues, ambas masas (inercial y gravitatoria) influyen ahora en el resultado del problema Con objeto de evidenciar dichas influencias, conviene escribir expresamente ambas masas en dicho resultado:

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{m v_A^2}}{\mathrm{2F}} = \frac{m_i v_A^2}{2\mu m_g g}$$

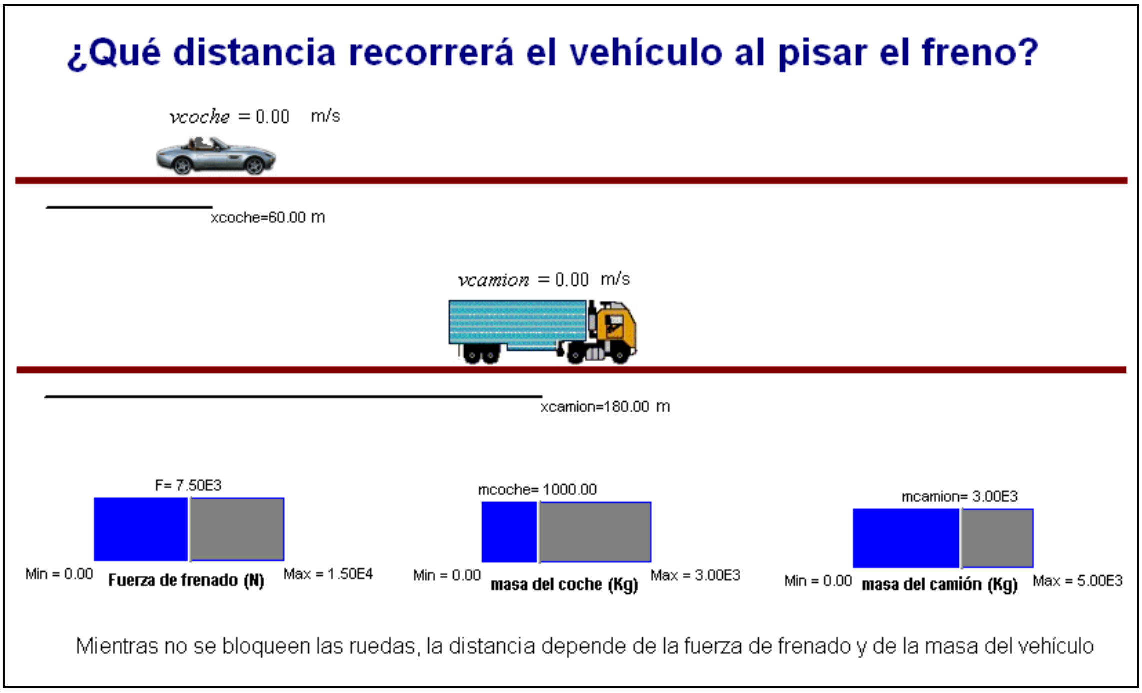
Así vemos que la masa inercial y la masa gravitatoria, se compensan y, finalmente, todos los vehículos recorren en estas condiciones la misma distancia en la frenada.

Finalmente, este problema nos remite también a la necesidad de que entre los vehículos se respete una distancia mínima de seguridad (que hay que calcular en función de la rapidez máxima permitida, el coeficiente de rozamiento y el tiempo que tarda un conductor en reaccionar ante la vista de un obstáculo) y de que los sistemas de frenado que impiden el bloqueo de las ruedas funcionen adecuadamente. Además es necesario tener en cuenta que lo que es verdaderamente limitante no es la fuerza con que se pueda frenar sino la velocidad a la que se circula, ya que si ésta es muy grande, el hecho de parar en muy poca distancia podría matar al conductor por la enorme aceleración a la que se vería sometido.

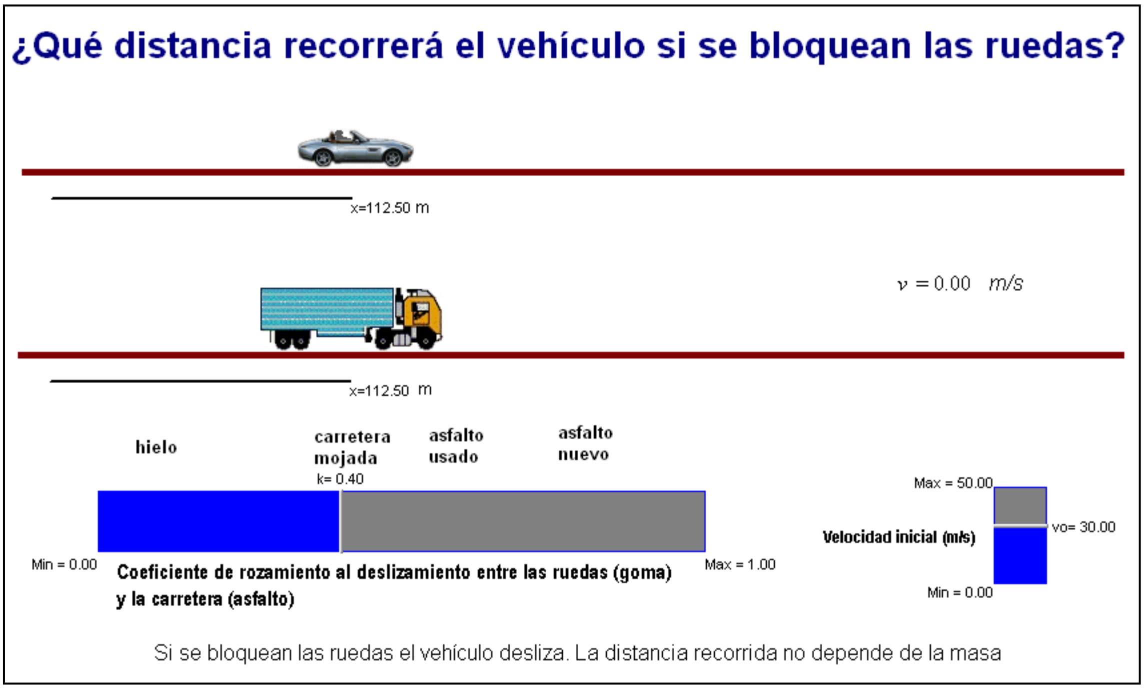
Refuerzo

Como actividad de refuerzo, los alumnos pueden trabajar con dos animaciones *Modellus*, que hemos elaborado, sobre este problema.

En la primera animación se muestra el comportamiento de dos vehículos diferentes (un coche y un camión) después de pisar el freno. En su estado inicial, la animación atribuye al coche los mismos datos y condiciones iniciales del movimiento que hemos adoptado en el problema y supone que el camión tiene el triple de masa que el coche. Todos estos parámetros se pueden modificar entrando en la ventana reservada a las condiciones iniciales o, también algunos de ellos (masas de cada uno y fuerza de frenado) manipulando en la misma pantalla sus controladores manuales, y observar cómo influyen dichas modificaciones en el resultado. La imagen siguiente corresponde al instante final de los movimientos de ambos vehículos, con los datos del enunciado.



La segunda animación muestra lo que ocurre cuando se bloquean las ruedas. Ahora la distancia recorrida por ambos vehículos es la misma, siempre que su velocidad inicial y el coeficiente de rozamiento también lo sean (esto último depende básicamente del tipo de ruedas que usen). Aquí también hemos colocado dos controladores manuales, con los que se puede modificar el coeficiente de rozamiento (el usuario puede seleccionar los valores concretos de dichos coeficiente recogidos en la tabla anterior) y la velocidad inicial (no las masas, puesto que, como hemos visto, no influyen en el resultado).



Las dos animaciones y el programa para hacerlas correr están disponibles en la página “Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física”, de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm