Teniendo en cuenta la influencia de la atmósfera, ¿Cómo evolucionará la velocidad de un objeto que se deja caer en la Tierra? ¿Con qué velocidad impactará contra el suelo?

En los estudios de movimientos de objetos que tienen lugar en las proximidades de la superficie terrestre es habitual no considerar la influencia de la atmósfera. Esta simplificación es acertada en bastantes casos, como, entre otros, los lanzamientos de proyectiles con un alcance relativamente corto, los lanzamientos, también de corto alcance, de otros objetos con densidad mucho mayor que la del aire (como, por ejemplo, balones u otros objetos utilizados en deportes), etc. Sin embargo, en otras situaciones la influencia del aire sobre los movimientos de objetos puede tener una importancia capital, ya que, en definitiva, se trata de movimientos realizados en el seno de un fluido.

En el movimiento de caída de un cuerpo, la atmósfera ejerce dos fuerzas sobre el cuerpo, que se han de sumar a la fuerza peso: la fuerza de empuje y la fuerza de rozamiento. La fuerza de empuje es significativa si la densidad del cuerpo tiene un valor comparable al de la densidad del aire (principio de Arquímedes). Como la densidad del aire es muy pequeña comparada con la de muchos de los objetos que habitualmente se consideran cuando estudiamos su movimiento de caída, muchas veces no se tiene en cuenta.

En cuanto a la fuerza de rozamiento, empezaremos planteando de qué factores puede depender, con objeto de ver en qué grado y bajo qué condiciones se puede o no despreciar.

¿Qué factores pueden influir en la intensidad de la fuerza de rozamiento que ejerce un fluido (como el agua, el aire, etc.) oponiéndose al movimiento de un cuerpo a través de él? ¿Cuándo se podrá despreciar la influencia de dicha fuerza de rozamiento en el estudio de los movimientos de caída en la Tierra y cuándo no?

Antes de emitir las hipótesis debemos ser conscientes de que en muchas situaciones el rozamiento con el aire no sólo lo hace más lento, sino que modifica extraordinariamente el movimiento de caída de un objeto. Para mostrarlo podemos realizar el sencillo experimento de dejar caer un folio de papel extendido. Comprobaremos entonces que el folio sigue una trayectoria zigzagueante, totalmente impredecible, debido a la acción simultánea de fuerzas y momentos que actúan sobre la hoja extendida. No ocurre lo mismo, si en lugar de una hoja dejamos caer un objeto tal que pueda asimilarse a una masa puntual. En ese caso el momento resultante sería nulo y solo actuarían el peso y la fuerza de rozamiento. Por eso, si se repite la experiencia anterior con la misma hoja pero formando previamente con ella una bola muy compacta, podemos simplificar el problema reduciendo el efecto de la fricción con el aire a una sola fuerza de rozamiento que actúa verticalmente hacia arriba. Por tanto, para poder estudiar este tipo de movimiento hay que empezar por imponerle unas condiciones bajo las cuales el objeto que cae se pueda asimilar a una masa puntual. Para ello, la mejor opción es que sea esférico.

Una vez se dan estas condiciones y el movimiento de caída es rectilíneo, es lógico suponer, en primer lugar, que el módulo de la fuerza de rozamiento, F_r, dependerá de la rapidez, v, con la que el cuerpo está atravesando el aire mientras cae (hipótesis 1). Muchas de nuestras experiencias cotidianas cuando nos movemos a través del aire y "sentimos" su influencia (por ejemplo, al correr o al montar bicicleta, etc.) nos muestran que, en efecto, la oposición que ejerce el aire a nuestro movimiento resulta tanto mayor cuanto mayor es la rapidez, v, con que nos movemos.

En segundo lugar es razonable pensar que el módulo de la fuerza de rozamiento, F_r, dependerá de un conjunto de propiedades, que pueden involucrar al aire (por ejemplo, su densidad, ρ_a, su viscosidad, η, etc.), o al cuerpo (su forma y tamaño, su densidad, ρ_c, etc.) (hipótesis 2), ya que, en principio, estos parámetros podrían afectar a aspectos como la permeabilidad que presente el aire a ser atravesado por el cuerpo, el modo en que el cuerpo pueda atravesarlo o resbalar entre las capas de dicho aire, etc.

Podemos expresar de forma simplificada estas dos hipótesis mediante:

$F_r = f\,(k, v)$

Siendo v la rapidez y k un coeficiente con el que, en principio, intentamos agrupar al conjunto de factores referidos en la hipótesis 2.

En este punto, conviene saber que la obtención de una ley operativa sobre este tipo de fuerza de rozamiento es una tarea compleja. Como vemos son muchos los factores que pueden influir en el coeficiente k, además pueden depender unos de otros, y algunos también pueden depender del otro factor que hemos considerado: la velocidad, v, a la que el cuerpo cae atravesando el aire.

Para operativizar la influencia de la velocidad, v, en principio, podríamos pensar en diferentes opciones (F_r proporcional a v, a v^2, etc.). De todas ellas, para un cuerpo de densidad suficientemente elevada (tal que se pueda despreciar la influencia del empuje), el mejor modelo es el que plantea que, durante la caída, F_r, es proporcional a v^2.

Finalmente, mediante estudios teórico-experimentales, se llega a la siguiente expresión de F_r:

$$F_r = k\cdot v^2 \quad \text{donde} \quad k = (\rho_a \cdot A \cdot \delta)/2$$

En esta expresión del coeficiente k, ρ_a es la densidad del aire, A es el área del cuerpo expuesta al aire y δ es otro coeficiente que depende de la forma del objeto y cuyo valor puede variar notablemente de unos cuerpos a otros. Por ejemplo, para un avión, cuyo diseño aerodinámico le permite atravesar el aire muy fácilmente, $\delta = 0.06$. En cambio, para un disco circular que caiga en el aire manteniendo una posición horizontal $\delta = 1.2$).

Si el cuerpo que cae es esférico $\delta = 0.4$. Entonces, puesto que el área de la esfera es $A = \pi\cdot R^2$, tenemos:

$$F_r = 0.2\cdot\rho_a\cdot\pi\cdot R^2\cdot v^2$$

Conviene ahora que nos fijemos en el dato de que la aceleración de la caída tiene un valor de 9'8 m/s^2 en ausencia de rozamiento. Se trata de un valor muy elevado, que hace que la rapidez aumente considerablemente en muy poco tiempo. En consecuencia, puesto que, de acuerdo con la fórmula anterior, F_r es proporcional a "v^2", la fuerza de rozamiento, aunque pueda ser muy pequeña al inicio de la caída, en seguida alcanzará un valor alto. Por tanto, concluimos que de ninguna manera se podrá despreciar.

Esta conclusión nos lleva a plantearnos cómo cabe esperar que evolucione entonces la rapidez, v, durante la caída.

Evolución de la rapidez, v, a lo largo de la caída. Concreción del problema.

Todos los factores que influyen en la fuerza de rozamiento tienen un valor constante (para cada cuerpo y cada región limitada de la atmósfera en la que cae el cuerpo), a excepción de la rapidez, v, que, como hemos visto, aumenta muy rápidamente. Esto implica que aunque consideremos una caída con una altura inicial relativamente pequeña, la influencia de la fuerza de rozamiento puede ser muy importante. Al mismo tiempo, en toda caída desde una altura no muy elevada, la fuerza peso es prácticamente constante.

Por tanto, a lo largo de un movimiento de caída con las características anteriormente expuestas, compite una fuerza vertical y de sentido descendente (el peso) con otra también vertical, pero de sentido ascendente, que va aumentando rápidamente al ir aumentando el módulo de la velocidad de caída. Esta competencia entre el peso constante y una fuerza de rozamiento paulatinamente creciente, implica una progresiva disminución del módulo de la aceleración y, por tanto, es lógico pensar que llegará un momento en que dicha aceleración sea cero. A partir de ese instante, el cuerpo debería seguir descendiendo con una rapidez constante, a la que llamamos rapidez (o velocidad) límite, v_L. Si la longitud de la caída no es demasiado pequeña, podemos esperar que dicha velocidad límite se alcance antes de que el cuerpo llegue al suelo y, por tanto, es esta velocidad, v_L, la magnitud que nos interesa obtener como solución del problema. Lo que nos lleva a reformularlo finalmente en los siguientes términos:

¿Cuánto valdrá la velocidad límite de un objeto que se ha dejado caer en el seno de la atmósfera terrestre?

Hipótesis

En primer lugar podemos trasladar aquí las hipótesis ya planteadas acerca de los factores que influyen en la fuerza de rozamiento, F_r. Puesto que el módulo de F_r aumentará cuando aumenten, R (radio del cuerpo), ρ_a (densidad del aire) y/o v (rapidez), planteamos que si aumenta cualquiera de estas magnitudes deberá disminuir el módulo de la velocidad límite buscada, v_L. Más precisamente: podemos avanzar que será especialmente importante la influencia del radio del cuerpo y también la de su velocidad durante la caída, ya que ambos parámetros están elevados al cuadrado en la expresión de F_r, mientras que la influencia de la densidad del aire (que no lo está) será menor.

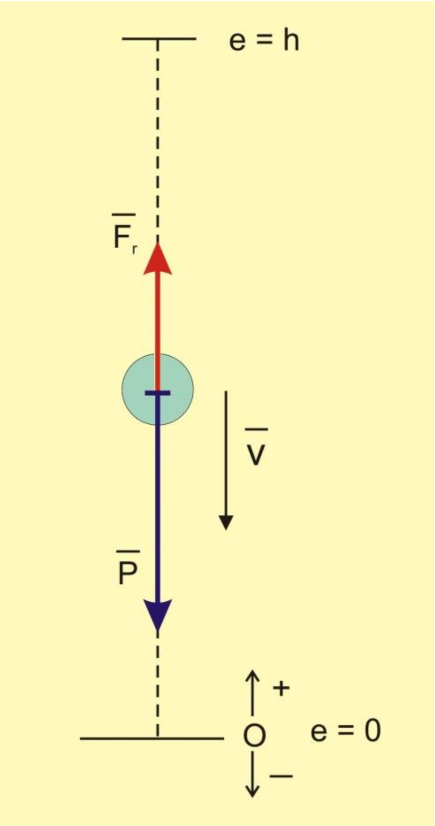
En segundo lugar, puesto que durante la caída se ejerce, en sentido favorable al movimiento, la fuerza peso, es lógico plantear que los factores que determinan dicha fuerza también afectarán a la velocidad límite. Es decir: cuanto mayor sea la masa del cuerpo que cae, m, y/o cuanto mayor sea la aceleración de la gravedad, g, el módulo de la velocidad límite buscada, v_L, también será mayor.

Estrategias de resolución y resolución propiamente dicha

Como la velocidad límite se alcanza cuando las dos fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo durante la caída se equilibran, podemos expresar dicho equilibrio entre la fuerza peso y la fuerza de rozamiento y despejar v, que, como ya sabemos, aparece en la expresión de la fuerza de rozamiento.

Para ver cómo evoluciona la velocidad antes de que se alcance la velocidad límite también podemos sumar las dos fuerzas intervinientes y obtener la fuerza resultante. Después habría que obtener la aceleración aplicando la tercera ley de Newton, y puesto que a = dv/dt, tendríamos que integrar esta ecuación para obtener v=f(t) y luego, a partir de la ecuación v=f(t) podríamos tratar de obtener la velocidad límite.

Dado que se trata de una caída vertical, podemos trabajar escalarmente. En la figura adjunta se ha representado el objeto en un instante dado de su caída y las fuerzas ejercidas sobre él (tangentes a la trayectoria), tomando como origen de espacios (posiciones sobre la trayectoria) el suelo (la posición va disminuyendo desde h hasta 0 y la rapidez es siempre negativa).



Para llevar adelante la primera estrategia, empezamos expresando estas dos fuerzas, teniendo en cuenta el sistema de referencia utilizado:

$P = - m \cdot g$

$F_r = C \cdot \rho_a \cdot \pi \cdot R^2 \cdot v^2$

Como ya hemos dicho, cuando se alcanza la velocidad límite ($v = v_L$) la fuerza resultante sobre el objeto ha de ser nula. Por tanto, en esa situación, se ha de cumplir que:

$0.2 \cdot \rho_a \cdot \pi \cdot R^2 \cdot v_L^2 - m \cdot g = 0$

De donde, despejando v_L, se obtiene:

$$v_L = \sqrt{\frac{m \cdot g}{0.2 \cdot \rho_a \cdot \pi \cdot R^2}}$$

Análisis del resultado. Aplicaciones y perspectivas.

Si nos fijamos en el resultado obtenido conviene empezar comprobando que es dimensionalmente homogéneo (L/T en ambos miembros). En segundo lugar, vemos que se cumplen todas las hipótesis acerca de la influencia de los diferentes parámetros en el resultado. Concretamente, podemos ver que:

<u>A igual forma y masa</u>, cuando el R aumenta, el módulo de la velocidad límite, v_L, disminuye de tal forma que cuando R se duplica, v_L se reduce a la mitad.

Si se trata de dos objetos esféricos de la misma sustancia (por ejemplo, dos bolas de granizo), al aumentar R también aumenta la masa m. En este caso, la velocidad límite puede expresarse como:

$$v_L = \sqrt{\frac{\rho_h \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot g}{0'2 \cdot \rho_a \cdot \pi \cdot R^2}} \rightarrow v_L = \sqrt{\frac{4 \cdot \rho_h \cdot g \cdot R}{0'6 \cdot \rho_a}}$$

En la última expresión anterior, ρ_h es la densidad del granizo y, como podemos ver en ella, la velocidad límite de las bolas de granizo aumenta conforme aumenta el valor de su radio, de manera que si R se hace cuatro veces mayor, la velocidad límite se hará el doble. Podemos, pues, percatarnos de la peligrosidad de las tormentas de granizo, sobre todo en los casos en que las bolas de este son de gran tamaño y su velocidad límite de caída crece considerablemente.

Ya hemos dicho que el estudio preciso de la caída de cuerpos en la atmósfera es bastante complejo y, de hecho, el procedimiento más "exacto" para obtener velocidades límite es hacerlo mediante procedimientos experimentales, lo que no impide que el cálculo de la velocidad límite de diferentes objetos cotidianos pueda tener aplicaciones de mucho interés. La tabla adjunta recoge valores reales aproximados de la velocidad límite de varios cuerpos en el aire. Estos valores ayudan a entender, por ejemplo, por qué es necesario usar paracaídas, lo peligroso que, como hemos dicho, puede resultar el granizo (si tenemos en cuenta que la fuerza ejercida por una bola de granizo al chocar es igual a la disminución brusca de su impulso lineal, igual al producto de su masa por su velocidad) o que, afortunadamente, la lluvia es, en este sentido, inofensiva.

VELOCIDAD LÍMITE DE CAÍDA DE ALGUNOS OBJETOS COTIDIANOS EN EL AIRE		
OBJETO	Rapidez en m/s	Rapidez en km/h
Paracaidista con paracaídas cerrado	55-60	200-216 km/h
Pelota de tenis	42	151’2 km/h
Balón de baloncesto	20	72 km/h
Granizo	14	50’4 km/h
Gota de lluvia	7	25’2 km/h
Paracaidista con paracaídas abierto	5	18 km/h

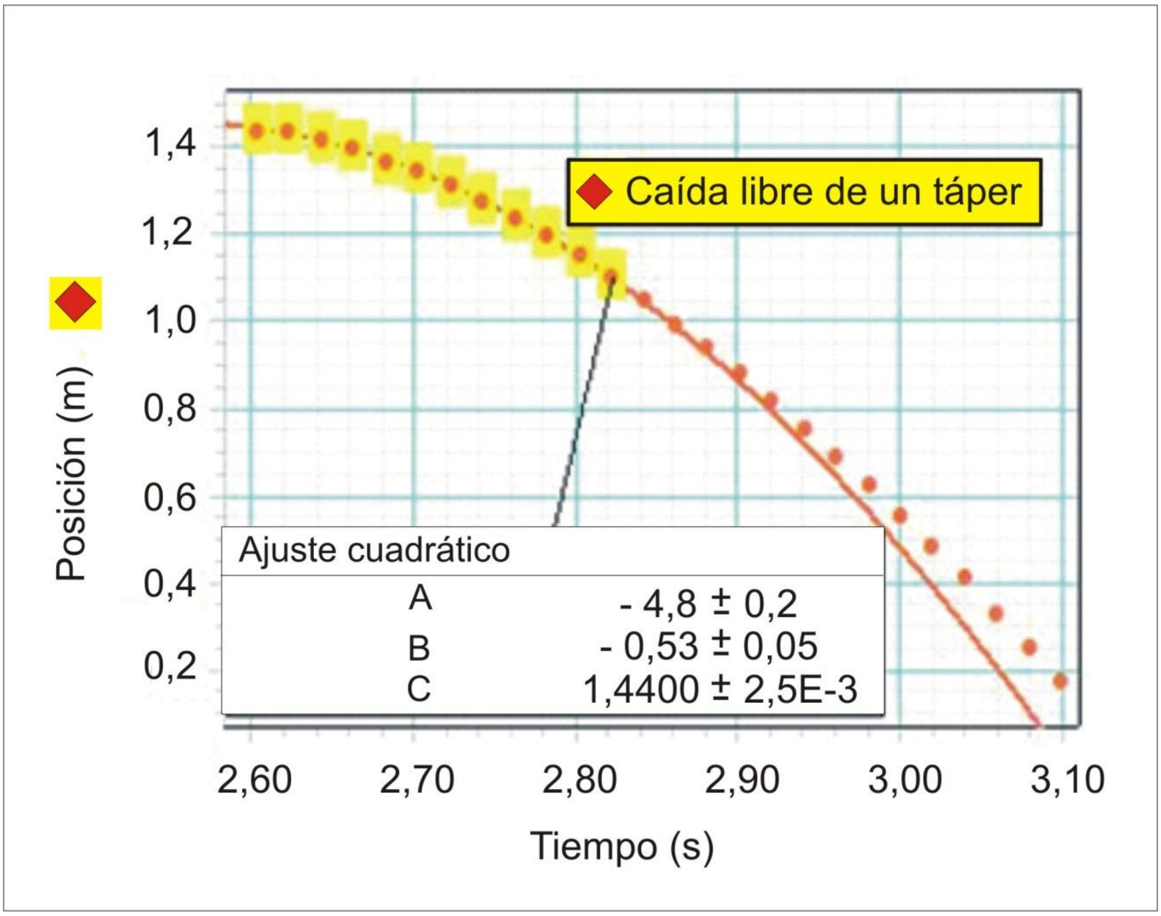
Otros datos interesantes que se pueden consultar en relación con este problema son los relativos al tiempo que tarda un cuerpo en alcanzar la velocidad límite. Por ejemplo, una persona que se lanza desde un avión viene a tardar unos 10 segundos en alcanzar esa velocidad (unos 200 km/hora) y, para lograrlo procura adoptar una postura casi horizontal, que ofrece mayor resistencia al aire (recordemos, δ mayor). Si no lo hiciera, su aceleración disminuiría mucho más despacio y, quizá, pondría en peligro su vida (si la altura no es muy elevada, podría llegar al suelo antes de que se abra el paracaídas o éste se abriría mientras cae con una velocidad excesiva). Aplicando estos conceptos se practican también caídas, desde alturas muy elevadas, con la intención expresa de alcanzar una velocidad límite mucho mayor. Para ello hay que adoptar una postura vertical y lo mas aerodinámica posible, minimizando así el valor del coeficiente δ. Como curiosidad, podemos decir que el récord del mundo de caída rápida es de algo más de 500 km/h.

Conviene ahora recordar que hemos considerado en todo momento despreciable la influencia de la fuerza de empuje. Sin embargo, no hay que olvidar que esta fuerza sí será muy importante si la densidad del cuerpo que cae es lo suficientemente pequeña, como para ser comparable con la densidad del aire. Ahora bien, de acuerdo con el principio de Arquímedes, la fuerza de empuje tiene un valor constante (para cada cuerpo y cada fluido). Por tanto, el empuje minorará el módulo de la aceleración inicial del movimiento de caída, pero no la conclusión esencial de que dicho cuerpo tienda a terminar cayendo con una velocidad límite constante. Lógicamente, cuanto mayor sea el empuje, menor será el valor de la velocidad límite y antes la alcanzará el cuerpo (todo ello, suponiendo que el modulo del empuje sea menor que el del peso; si fuera mayor, el cuerpo ascendería y como la fuerza de rozamiento seguiría oponiéndose al rozamiento, también alcanzaría una velocidad límite de la ascensión).

Por otra parte podemos decir que cuando se estudia experimentalmente la caída libre en el laboratorio, la influencia del aire puede ser bastante más importante de lo que, en principio, podría pensarse. De hecho, se pueden plantear trabajos prácticos muy interesantes, que la pongan en evidencia. Por ejemplo, se puede estudiar la caída de un cuerpo relativamente ligero y con una forma adecuada (sirve, por ejemplo, un recipiente de plástico, como los utilizados en nuestras cocinas) y, para obtener mayor precisión en las medidas, se pueden utilizar sensores de posición.

En la página web de materiales didácticos de la Sección Local de Alicante de la RSEF, se puede consultar un experimento de este género, que realizaron en el IES “Leonardo da Vinci”, alumnos de 1º bachillerato.
Todos los equipos obtuvieron un valor medio de g inferior a 9.8 m/s^2, a lo largo de una caída de una longitud del orden de un metro y medio. Para comprobar que este resultado se debía a la influencia de la fuerza de rozamiento, seleccionaron los primeros valores de sus gráficas posición-tiempo. Tal como muestra la gráfica adjunta, así pudieron comprobar que, para estos instantes iniciales de la caída, el valor de la aceleración (representado por el doble del coeficiente A) sí se aproximaba mucho al esperado (2·A = 9.6

m/s^2). Como se ve, también se observaba muy claramente que los puntos siguientes de la gráfica se van alejando de la parábola que representaría a la ecuación de la posición si se mantuviera esta aceleración, en lugar de ir decreciendo.



Como vemos, este experimento confirma la hipótesis de que el módulo de la fuerza de rozamiento aumenta muy rápidamente al aumentar la velocidad.

Finalmente, nos referimos a un aspecto del problema, que convendría tratar en clase, pero sobre el que no se ha profundizado debido a la dificultad de su vertiente matemática, que es insuperable en Secundaria. Se trata de especificar con detalle cómo evolucionan las magnitudes cinemáticas (posición, velocidad y aceleración) durante la caída.

En relación con esta cuestión, en el apartado dedicado a las posibles estrategias de resolución, se ha planteado, sin llevarla adelante, una consistente en escribir la expresión de la aceleración del movimiento (conocidas las fuerzas que actúan), como paso previo para obtener (integrando), primero la ecuación de la evolución de la velocidad v=f(t) y, a continuación, la de la posición, y = f(t). Los primeros pasos de este proceso, no ofrecen ninguna dificultad a los estudiantes, que conocen las expresiones de las dos fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo durante la caída (seguimos trabajando escalarmente):

$P = - m \cdot g \qquad Fr = k \cdot v^2$

Y, por tanto, la de la fuerza resultante:

$F_{res} = k \cdot v^2 - m \cdot g$

Por supuesto, también saben que $F_{res} = m \cdot a = m \cdot dv/dt$, y, por tanto, pueden escribir:

$m \cdot dv/dt = k \cdot v^2 - m \cdot g \rightarrow dv/dt = g - (k/m)\, v^2 - g$

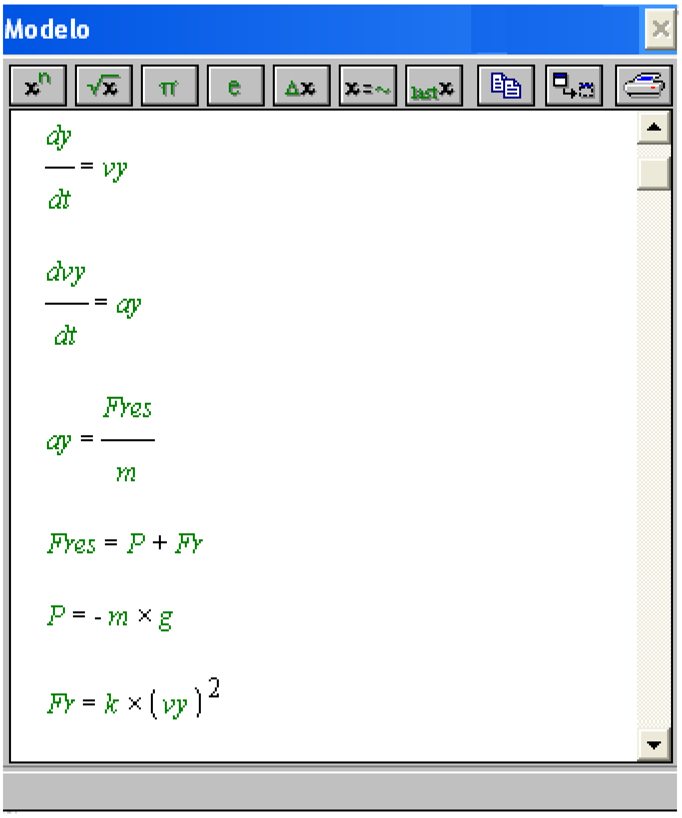
Pero, llegados aquí no pueden resolver esta ecuación diferencial, ni, por tanto, tienen nivel para obtener la ecuación de la evolución de la velocidad v = f(t).

Teniendo en cuenta esta dificultad, puede resultar muy instructivo plantear a los estudiantes que, en lugar de buscar las ecuaciones matemáticas, aventuren, a modo de hipótesis, el perfil (cualitativo) que deberían tener las gráficas de las magnitudes cinemáticas (posición y velocidad). Después ello, como veremos en el apartado siguiente, podemos servirnos de las nuevas tecnologías para confirmar o falsar dichas hipótesis.

Refuerzo:

Para reforzar algunos de los conceptos involucrados en este problema hemos creado dos animaciones *Modellus*.

La primera de ellas simula la caída vertical de una persona desde una altura elevada (por ejemplo, desde un avión). Con objeto de completar la tarea que acabamos de exponer al final del apartado anterior, se puede hacer que los estudiantes participen en la escritura del modelo físico-matemático, ya que, como muestra la imagen adjunta, dicho modelo se compone de las mismas expresiones que conforman la estrategia de resolución, que ellos pueden plantear, pero no llevar hasta el final.

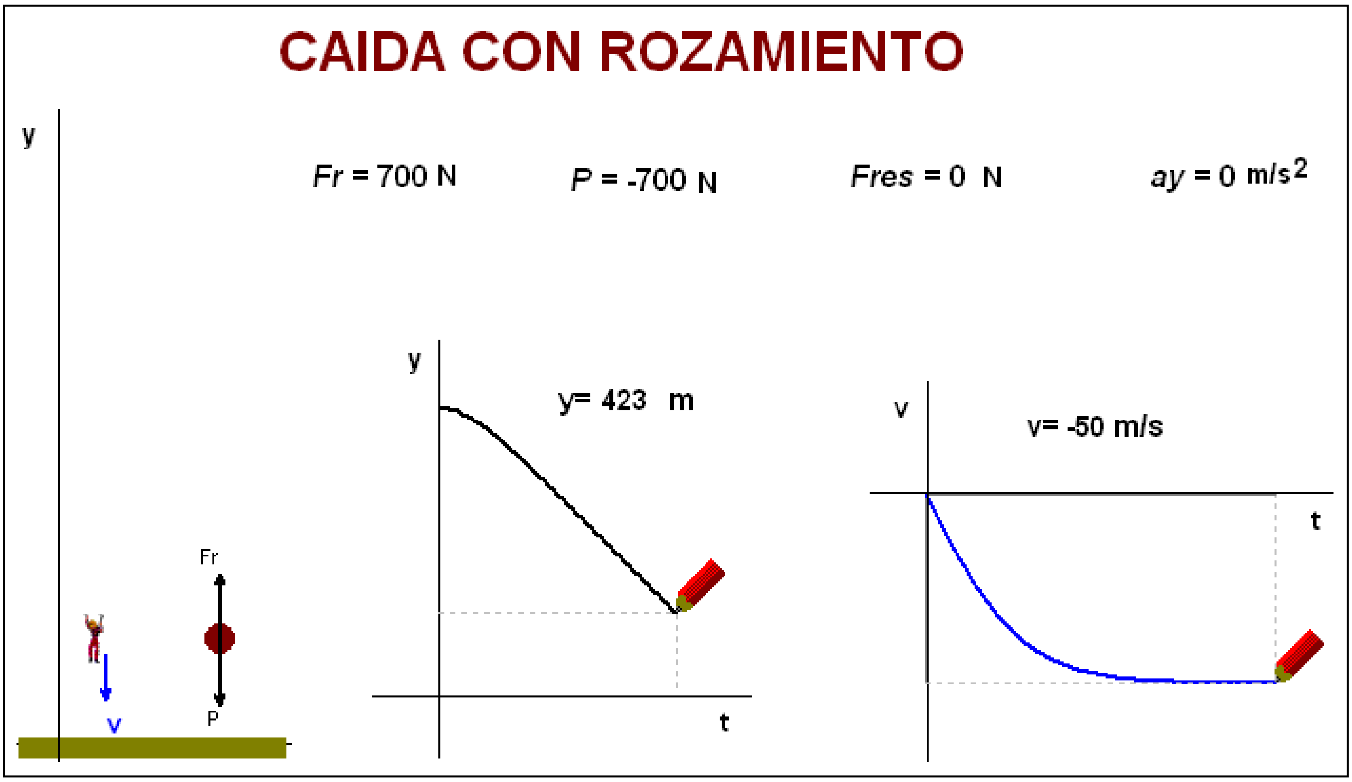


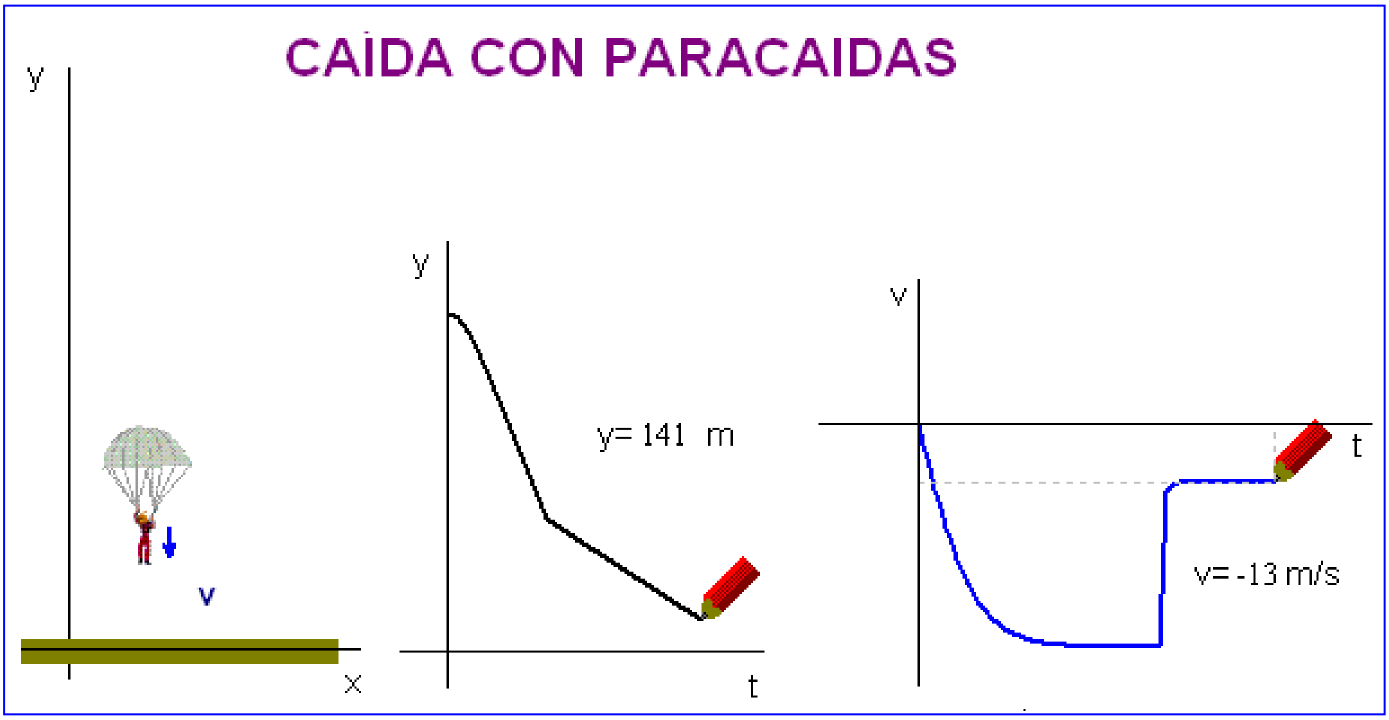
Así, nos servimos del programa informático que hace correr a la animación para que solucione la parte del problema que los alumnos no pueden resolver. Se diseña la animación para que se vayan dibujando paulatinamente en la pantalla las gráficas de la posición y de la velocidad (mientras se simula la caída de la persona) y, al hacerla correr, los alumnos pueden comparar sus hipótesis sobre dichas gráficas con el resultado mostrado en pantalla.

Por supuesto, además de estas gráficas, en la pantalla, también se simula progresivamente la caída de la persona; también se obtienen en cada instante los valores de todas las magnitudes, y se van dibujando los vectores que representan a las dos fuerzas intervinientes. Así, al hacerla correr se visualizan diferentes aspectos destacables del problema. Por ejemplo, se observa que durante el primer tramo de la caída la fuerza de rozamiento se va incrementando (a medida que también lo hace la rapidez), hasta llegar a igualarse a la fuerza peso. Desde ese instante la fuerza resultante es cero y la persona sigue cayendo con la velocidad límite constante.

En cuanto a la segunda animación, simula la misma situación, pero hemos incorporado también un paracaídas que se abre poco después de que la persona haya alcanzado la velocidad límite. El efecto del paracaídas es producir una disminución brusca de la velocidad de caída, que, desde ese momento, sigue siendo uniforme, pero a una velocidad mucho más moderada, adecuada para que la persona aterrice sin hacerse daño. Todo lo cual queda reflejado en las diferentes magnitudes y en las gráficas del movimiento.

Las imágenes siguientes corresponden a una secuencia intermedia de cada una de las dos animaciones. Ambas y el programa para hacerlas correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm




CAÍDA CON PARACAIDAS
y
x
v
y
t
y= 141 m
v
t
v= -13 m/s