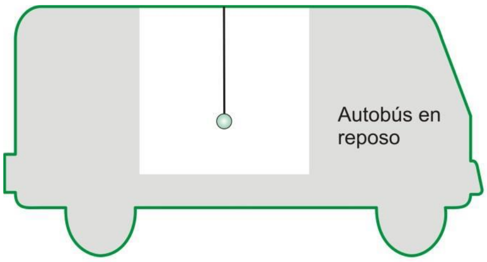
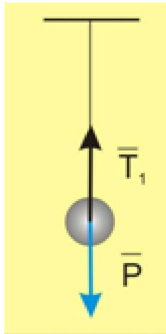
De un hilo de 50 cm de longitud, sujeto al techo de un autobús en reposo, se suspende un cuerpo de 4 kg. El autobús arranca con una aceleración de 4 m/s^2 y en línea recta. ¿Qué ángulo formará el hilo con la vertical? ¿Cuánto valdrá la tensión del hilo?

Planteamiento cualitativo

Conviene distinguir entre la situación inicial con el autobús en reposo y la situación posterior, con el autobús moviéndose en línea recta y con aceleración constante.

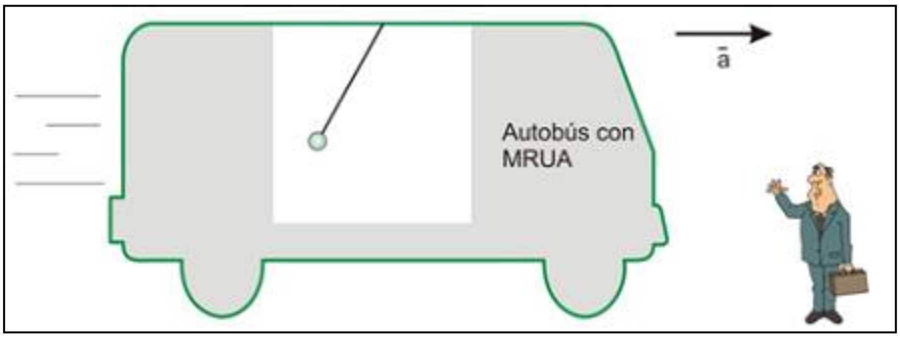
La primera (autobús en reposo), corresponde a una situación de equilibrio en la que la fuerza que actúa sobre el cuerpo verticalmente hacia arriba (tensión del hilo $\vec{T}_1$) se verá compensada por la fuerza peso $\vec{P}$ que ejerce la Tierra sobre el cuerpo hacia abajo, según se indica en el esquema adjunto.





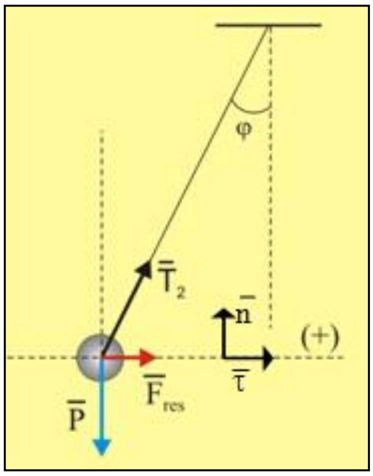
En la posición de equilibrio: $\vec{F}_{res} = \vec{T}_1 + \vec{P} = 0$, y por tanto: $T_1 = P = m \cdot g$ (1)

En la segunda situación (autobús con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado), el cuerpo que pende del hilo, para un observador externo que pudiera observar el interior del autobús desde la acera, no se encuentra en equilibrio, sino que se está moviendo con la misma aceleración con que se mueve el autobús, por lo que podemos plantearnos:



¿A qué fuerza o fuerzas cabe atribuir dicha aceleración?

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso $\vec{P}$ y la tensión del hilo $\vec{T}_2$ (distinta de la correspondiente a la situación anterior), de manera que la resultante de ambas deberá tener la misma dirección y sentido que la aceleración con que se mueve el cuerpo:



$$\vec{F}_{res} = \vec{P} + \vec{T}_2 = m \cdot \vec{a}$$

Conviene resaltar que la bolita del péndulo en la nueva situación se halla retrasada respecto de su posición inicial dentro del autobús. Ello se explica porque la bolita, respecto de un observador exterior en reposo, se mueve con la misma aceleración que el autobús, de modo que sobre ella ha de actuar una fuerza resultante no nula en la misma dirección y sentido que el movimiento y dicha fuerza no puede ser otra que la resultante de sumar la tensión del hilo y el peso, que son las únicas fuerzas reales que actúan sobre ella. El hecho de que cuando un autobús, moviéndose en línea recta, aumenta su velocidad notemos que el respaldo del asiento nos empuja, es una consecuencia del principio de la inercia, según el cual un cuerpo por sí mismo no puede modificar la velocidad a la que se mueve, de modo que en un hipotético autobús sin rozamiento y nada donde cogerse, seguiríamos con la misma velocidad hasta chocar con la parte trasera del interior del autobús.

Hipótesis y casos límite

Parece claro que, en esta nueva situación el hilo se desviaría tanto más de la vertical (es decir, el ángulo φ será tanto mayor), cuanto mayor fuese la aceleración y cuanto menor fuese la intensidad del campo gravitatorio. Es más, dicha desviación sería nula en el caso particular de que la aceleración también lo fuese (autobús en reposo o con movimiento rectilíneo y uniforme) y tendería a 90 º (desviación máxima) en el hipotético caso de que la intensidad “g” de la gravedad tendiese a 0 (todo ello, a igualdad de los restantes factores).

Estrategias de resolución y resolución

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica en componentes intrínsecas, podemos encontrar la relación existente entre la aceleración tangencial a_t y el ángulo φ de desviación:

$F_{res\,t} = m \cdot a_t \rightarrow T_2 \cdot \text{sen}\,\varphi = m \cdot a_t$ (2)
$F_{res\,n} = m \cdot a_n \rightarrow T_2 \cdot \cos\varphi - P = m \cdot a_n = 0$ (3)

A continuación, mediante las dos ecuaciones anteriores, podemos obtener el valor del ángulo φ buscado. Despejando sen φ y cos φ de las ecuaciones anteriores (2) y (3) y dividiendo, se obtiene:

$$\frac{sen\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{m \cdot a_t}{T_2}}{\frac{P}{T_2}} \rightarrow \boxed{tg\varphi = \frac{a_t}{g}}$$

Análisis del resultado obtenido

Si analizamos el resultado anterior, vemos que es adimensional en ambos lados de la ecuación y que recoge las hipótesis y casos particulares considerados al comienzo. Por ejemplo, que cuanto mayor sea la aceleración con que se mueva el autobús, mayor será el ángulo o que cuanto mayor fuese la intensidad del campo gravitatorio, menor sería el ángulo (todo ello, a igualdad de los restantes factores).

También vemos que la desviación producida **no depende**[1] de la masa del cuerpo que pende del hilo (aunque sí la tensión del hilo que será tanto mayor cuanto mayor sea dicha masa). Este es un ejemplo de una situación dinámica en la que se compensan las influencias en el resultado de la masa inercial (m_i) y la masa gravitatoria (m_g) en el resultado. En efecto, cuanto mayor sea la masa (gravitatoria) de la bola, mayor es su peso ($P = m_g \cdot g$) y menor debería ser el ángulo, pero, al mismo tiempo, cuanto mayor sea la masa (inercial) de la bola, mayor es la fuerza resultante actuando sobre ella ($F_{res} = m_i \cdot a$), y mayor debería ser el ángulo.

Sustituyendo numéricamente (tomando g = 9,8 N/kg), obtenemos φ = 22,2 º

[1] Es posible que en las hipótesis algunos alumnos incluyan la masa como uno de los factores a considerar. En estos casos, suele ser conveniente aceptarlo como una hipótesis más y luego, al analizar el resultado proceder a descartarla.

En cuanto a los valores de la tensión del hilo, mediante la ecuación (1) se obtiene T_1 = 32 N, mientras que con la ecuación (2) o con la ecuación (3), obtenemos T_2 = 42,3 N que, como era de esperar, resulta ser mayor.

Nuevas perspectivas

A la luz de lo hecho en este problema, proponed una forma "artesanal" de calcular el valor aproximado de la aceleración de un avión durante la maniobra de despegue (o aterrizaje).

Con un péndulo y un transportador de ángulos podemos medir aproximadamente el ángulo φ de desviación del péndulo momentos antes de que el avión pierda contacto con el suelo (cuando la aceleración es máxima) y utilizando la expresión anterior, determinar la aceleración del avión como $a = g \cdot \tan\varphi$

El hecho de poder realizar este experimento u otro similares para determinar la aceleración de un vehículo cuando estamos en su interior, se debe a que el movimiento acelerado es perfectamente identificable, con independencia de cuál sea el sistema de referencia que adoptemos para obtener dicha aceleración. Este es un concepto fundamental de la mecánica de Newton, en la que la aceleración es una magnitud absoluta (tiene el mismo valor para cualquier sistema de referencia). En cambio, la velocidad es una magnitud relativa (su valor depende del sistema de referencia en el que se determine) en la mecánica de Newton, lo que nos lleva a plantear la siguiente cuestión:

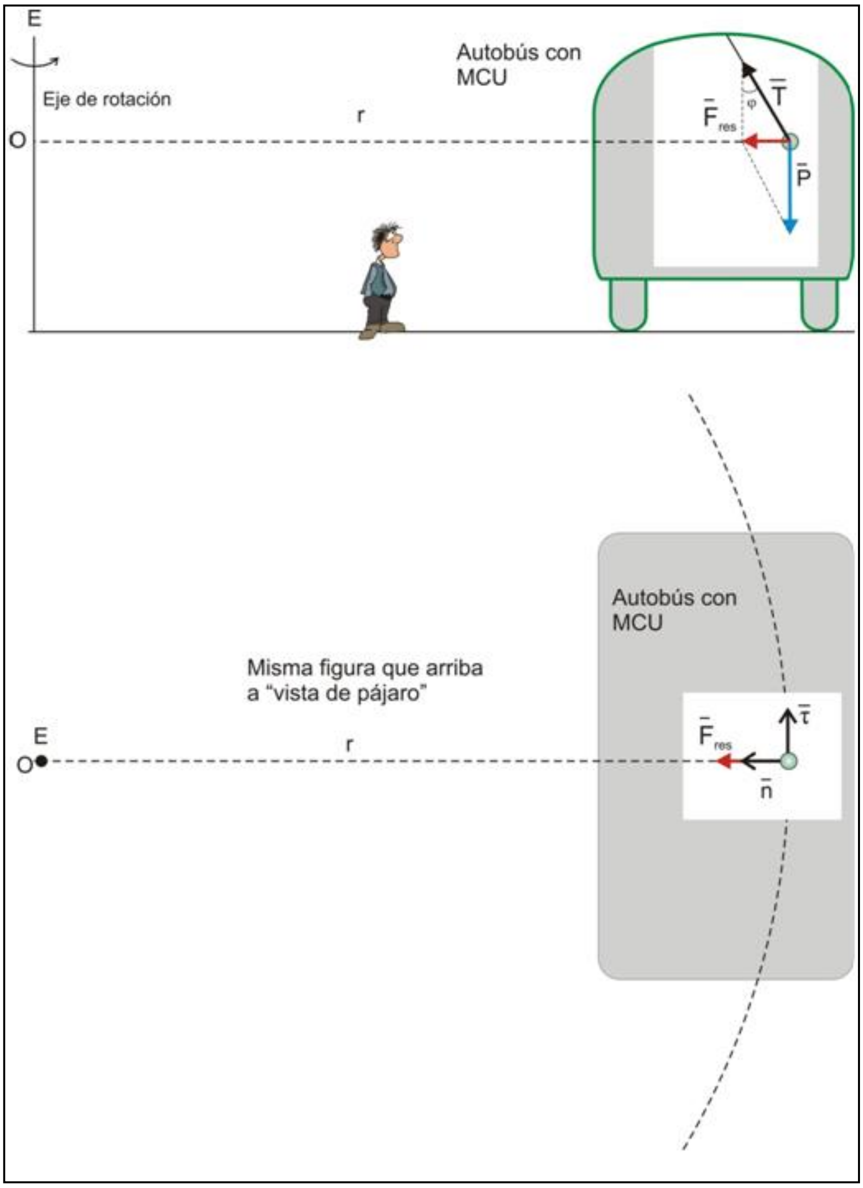
¿Qué sucedería si el autobús se estuviese desplazando con movimiento rectilíneo y uniforme? ¿Se desviaría también el péndulo?

Si el autobús (y también el péndulo en su interior) describe un movimiento rectilíneo y uniforme (MRU), la fuerza resultante que se ejerce sobre la bolita ha de ser cero. Para que así sea el peso y la tensión se han de compensar, y, por tanto, la tensión ha de ser vertical (y ascendente). Por tanto, el péndulo no se desvía. Este resultado no depende de que el módulo de la velocidad constante del autobús sea mayor o menor. Y, por este motivo, no podremos realizar ningún experimento que nos permita establecer ningún de la velocidad del vehículo desde dentro de él. Al contrario que ocurre con la aceleración, la velocidad es una magnitud relativa (tiene un valor diferente en cada sistema de referencia exterior al autobús).

¿Qué sucedería si el autobús tomase una curva de 40 m de radio con una rapidez constante de 50 km/h? ¿Se desviaría ahora el péndulo? En caso afirmativo: ¿hacia dónde y cuánto?

En la nueva situación planteada el autobús (y también el péndulo en su interior), describe un movimiento circular y uniforme (MCU) y, por lo tanto, la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la bolita deberá ser la fuerza normal necesaria para que esta describa tal tipo de movimiento.

De acuerdo con el primer principio de la dinámica o principio de la inercia, la bolita del péndulo "tiende" a mantener la velocidad con que se mueve en un instante dado del movimiento. Si de hecho no lo hace, sino que dicha velocidad va cambiando continuamente la dirección, pero mantiene su módulo constante, es porque debe haber una fuerza resultante perpendicular a la trayectoria, que le obligue a modificar la dirección de esa velocidad continuamente. Dicha fuerza, no puede ser otra que la suma de la tensión del hilo y del peso de la bolita.



Por tanto, la bolita (y con ella el hilo del péndulo) al tomar la cuerva se desplazará hacia el exterior de dicha curva, de modo que la fuerza resultante pueda dirigirse hacia el centro de la curva, tal y como se puede ver en las figuras adjuntas.

En consecuencia, cabe esperar que, por ejemplo, el péndulo se desvíe tanto más de la vertical cuando, para una curva de un radio determinado, la velocidad con que el autobús toma dicha curva (sin salirse de ella) aumente.

Para determinar la desviación del péndulo, dada por el ángulo φ que forma con la vertical, podemos proceder igual que anteriormente y aplicar la ecuación fundamental de la dinámica trabajando en componentes intrínsecas:

$F_{res\ t} = m \cdot a_t \ \rightarrow\ a_t = 0$ (ya que no existe ninguna fuerza tangente a la trayectoria)

$F_{res\ n} = m \cdot a_n \rightarrow\ F_{res\ n} = m \cdot v^2/r \rightarrow$

$$T \cdot \text{sen}\varphi = m \cdot v^2/r \quad (4)$$

Por otra parte, en este caso, si nos fijamos en la dirección perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$, hemos de concluir que, al no haber ninguna aceleración en dicha dirección se ha de cumplir que:

$$T \cdot cos\varphi = P \rightarrow T \cdot cos\varphi = m \cdot g \ \ (5).$$

Dividiendo ahora las dos últimas ecuaciones obtenidas, llegamos finalmente a:

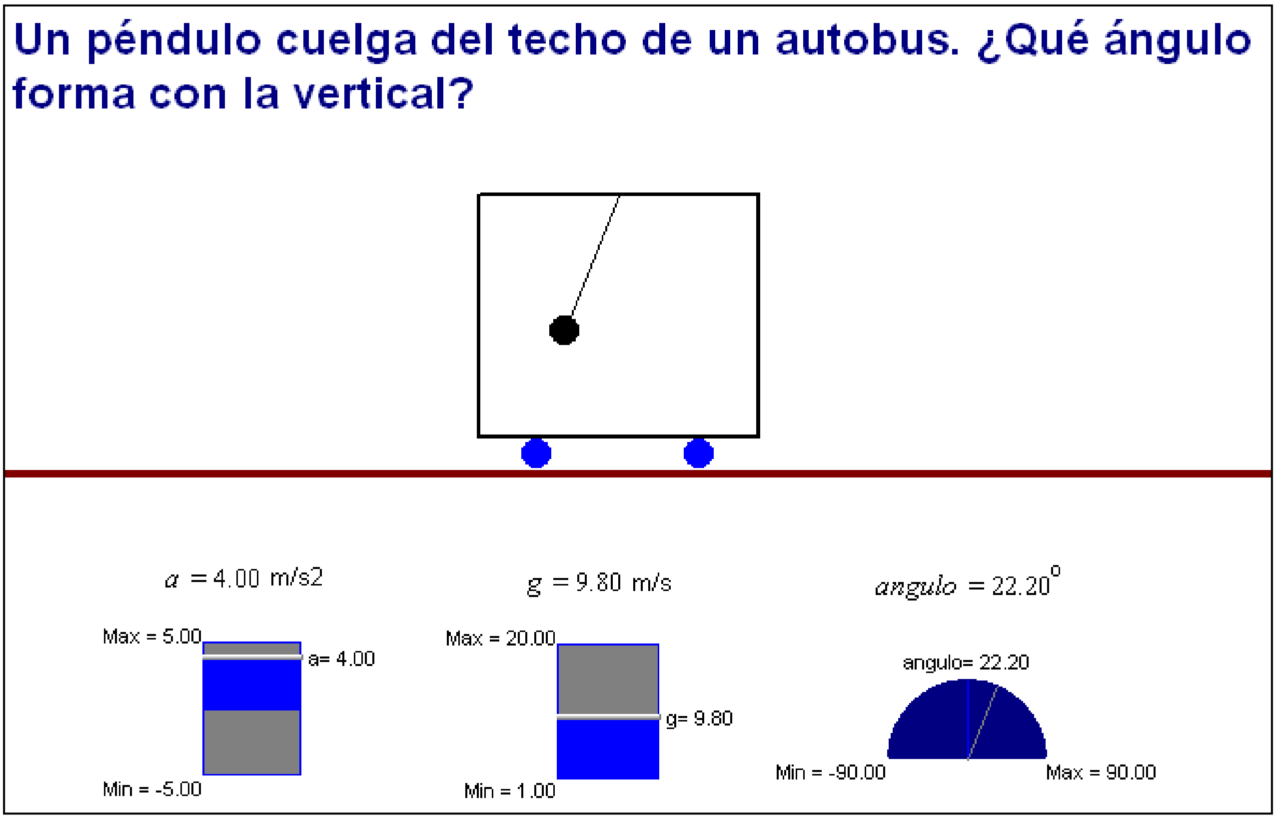
$$\frac{T \cdot \sin\varphi}{T \cdot \cos\varphi} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \rightarrow \tan\varphi = \frac{v^2}{r \cdot g}$$

Vale la pena observar la similitud existente entre los resultados correspondientes a la desviación experimentada por el péndulo en las dos situaciones planteadas. La primera ($\tan\varphi = \frac{a_t}{g}$), correspondiente a un MRUA, nos informa de que la desviación será tanto mayor (g es constante) cuanto mayor sea la aceleración tangencial, esto es, cuanto más aprisa cambie la velocidad en módulo. La segunda ($\tan\varphi = \frac{a_t}{g}$), correspondiente a un MCU, nos informa de que la desviación será tanto mayor cuanto mayor sea la aceleración normal, esto es, cuanto más aprisa cambie la velocidad en dirección (lo que ocurre para valores altos de v, manteniendo r constante, y para valores pequeños de *r*, manteniendo *v* constante) tal y como se puede apreciar en el resultado literal anterior. Finalmente, sustituyendo valores numéricos, se obtiene:

$$\tan\varphi = 0{,}492 \quad \rightarrow \quad \varphi = 26{,}2$$

Refuerzo

Para reforzar una parte de los conceptos vertidos en este problema, los alumnos pueden trabajar con una animación *Modellus*, que hemos elaborado sobre él. Reproduce el movimiento del autobús (en el caso de que sea rectilíneo) e incluye dos controladores manuales para modificar los dos parámetros de los que depende el resultado del problema: aceleración del autobús y aceleración de la gravedad. Entre otras posibilidades, los alumnos también pueden probar aceleraciones negativas y comprobar que, en ese caso, el péndulo se desvía en sentido opuesto (se adelanta al autobús).



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF
http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm