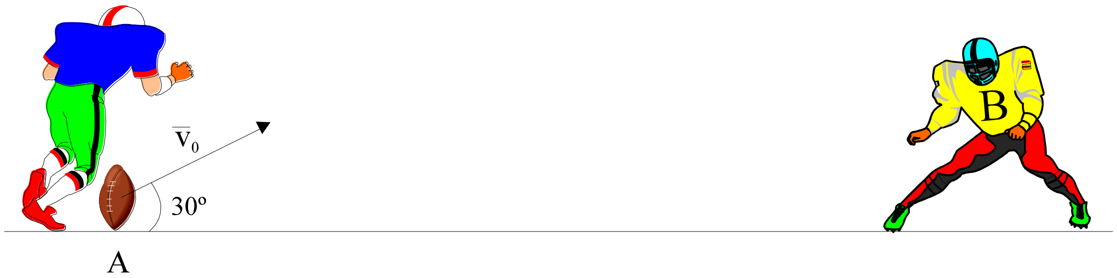
Un jugador de rugby patea el balón y éste sale de su pié con rapidez de 28 m/s formando un ángulo de 30 ° con la horizontal. Otro jugador que se encuentra a 40 m de distancia en la dirección del balón, corre en ese mismo instante a por él. ¿Cuál debe ser su rapidez, supuesta constante, para recogerlo justo antes de chocar contra el suelo?



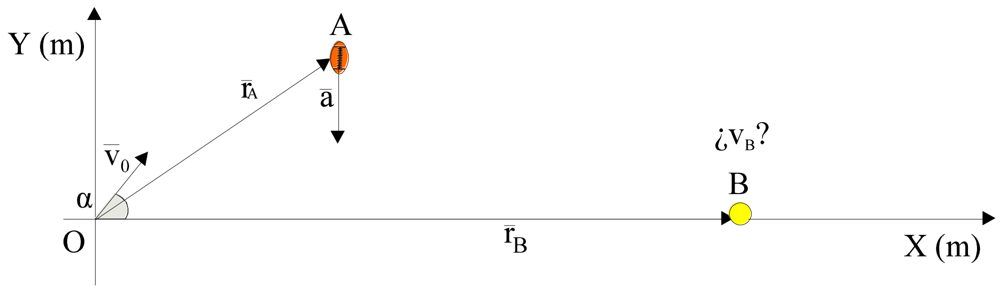
Presentación de la situación problemática, discusión de su posible interés, precisión del problema y análisis cualitativo de la situación.

Se trata de un problema en el que se da un enunciado ya concreto y con datos numéricos y que también plantea una situación relacionada con otros deportes en los que se utiliza un balón o una pelota que se puede lanzar oblicuamente, como, por ejemplo ocurre en golf, fútbol, baloncesto, etc. Otro ejemplo de este tipo de movimiento es el lanzamiento de proyectiles. La relación entre el desarrollo inicial de la artillería y los estudios teóricos que al mismo tiempo se realizaron tanto sobre el tiro oblicuo como el horizontal es un hecho histórico bien establecido, que se puede resaltar.

En el caso que se nos plantea, el móvil A, describe una trayectoria que, en principio es desconocida (aunque nuestras experiencias cotidianas nos hagan pensar que tendrá una forma parabólica, no sabemos cuál será concretamente). Durante su movimiento el balón se ve sometido a la aceleración de la gravedad. Por su parte, B tiene un movimiento rectilíneo y uniforme sobre el eje x, con el fin de coger el balón en el momento que llegue al suelo.

Para resolver el problema, conviene que utilicemos un sistema de referencia espacio-temporal común para los dos móviles, lo que nos lleva a aplicar un tratamiento vectorial para describir el movimiento de ambos.

Tomaremos como sistema de referencia espacial unos ejes de coordenadas cartesianas cuyo origen coincida con el punto desde donde se lanza el balón, tal y como se indica en el esquema siguiente, y como origen de tiempos el instante en que sale el balón. Haremos la aproximación de considerar A (balón) y B (jugador contrario) como masas puntuales y la fricción con el aire nula.



Los datos para cada uno de los móviles son:

Móvil A (balón de rugby): $\vec{a}_A = (0, -g)$; $t_0 = 0$; $\vec{v}_{0A} = (v_{0A}\cos\alpha,\ v_{0A}\operatorname{sen}\alpha)$; $\vec{r}_{0A} = (0, 0)$

Móvil B (jugador contrario): $\vec{a}_B = (0, 0)$; $t_0 = 0$; $\vec{v}_B = (v_B, 0)$; $\vec{r}_{0B} = (x_{0B}, 0) = (40, 0)$ m. Donde v_B es la incógnita a determinar.

Cabe esperar que, en las condiciones que se han considerado, la rapidez v_B dependa de alguna manera de la rapidez inicial v_{OA} con que se lanza el balón, del ángulo α con que se lance, de la distancia inicial x_{OB} existente entre ambos jugadores, y de la aceleración de la gravedad g. Es decir:

$v_B = f(v_{OA}, \alpha, x_{OB}, g)$.

De acuerdo con la situación planteada, no estamos seguros de qué tendrá que hacer el jugador B. Podría ser que tuviera que correr hacia la derecha, quedarse en donde está o correr hacia la izquierda, dependiendo del alcance máximo del balón. Así, por ejemplo, si B se moviera hacia la derecha, podemos pensar que, a igualdad de los restantes factores, v_B será tanto mayor cuanto mayor sea v_{0A} y menor x_{0B}. Por lo que se refiere a la influencia del ángulo del lanzamiento, α, sabemos que el alcance A es máximo cuando α= 45º mientras que se va reduciendo conforme dicho ángulo se acerca a 90º (siendo A = 0 cuando α = 90º), por lo que podemos pensar que en el primer caso será más probable que el jugador se haya de mover hacia la derecha para recoger el balón, mientras que en el segundo, será más probable que haya de moverse hacia la izquierda.

Diseño de posibles estrategias de resolución

Con los datos anteriores podemos determinar las ecuaciones $\vec{v} = \vec{v}(t)$ y $\vec{r} = \vec{r}(t)$ para cada móvil, integrando a partir de la aceleración. Mediante dichas ecuaciones podremos conocer fácilmente la velocidad o la posición de cada uno de ellos en cualquier instante. Posteriormente podríamos resolver el problema considerando que en el momento en que B recoja el balón la posición de ambos móviles (que consideramos como masas puntuales) habrá de ser la misma.

Resolución, análisis de los resultados, implicaciones y nuevas perspectivas.

Ecuaciones de movimiento para el móvil A:

A partir del vector aceleración:

$\vec{a}_A = \dfrac{d\vec{v}_A}{dt} \rightarrow d\vec{v}_A = \vec{a}_A \cdot dt \rightarrow \int_{\vec{v}_{0A}}^{\vec{v}_A} d\vec{v}_A = \int_0^t (0, -g)\, dt$. Resolviendo estas integrales:

$$\vec{v}_A = (v_{0A} \cos\alpha,\ v_{0A} \,\text{sen}\,\alpha) + (0,\ -g\,t) \rightarrow \vec{v}_A = (v_{0A} \cos\alpha,\ v_{0A} \,\text{sen}\,\alpha - gt)$$

A partir del vector velocidad:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \rightarrow d\vec{r}_A = \vec{v}_A \cdot dt \rightarrow \int_0^{\vec{r}_A} d\vec{r}_A = \int_0^t \vec{v}_A \cdot dt$$

$$\vec{r}_A = \int_0^t (v_{0A} \cos\alpha,\ v_{0A} \,\text{sen}\,\alpha - g\,t)\, dt \rightarrow \vec{r}_A = (v_{0A} \cos\alpha \cdot t,\ v_{0A} \,\text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2)$$

Ecuaciones de movimiento para el móvil B:

Dado que se mueve con movimiento uniforme sobre el eje X tendremos que:

$\vec{v}_B = (v_B, 0)$ m/s y el vector de posición: $\vec{r}_B = (x_{0B} + v_B t\ , 0)$

En las ecuaciones anteriores v_B es la incógnita y <u>por eso no le hemos puesto signo</u>. Además, no sabemos "a priori" en qué sentido se ha de mover B para recoger la pelota.

¿Qué podemos hacer ahora para calcular con qué rapidez v_B se debería de mover B para coger el balón justo cuando llegue al suelo?

En el momento en que A y B se encuentren, los vectores de posición de ambos móviles serán los mismos (tengamos en cuenta que hemos escogido un único sistema de referencia posición-tiempo). Si designamos como t_1 a ese instante, e igualamos las coordenadas correspondientes, podremos obtener v_B:

En el momento del encuentro: $x_A = x_B \rightarrow v_{0A} \cos\alpha \cdot t_1 = x_{0B} + v_B \cdot t_1$

Despejando v_B obtenemos que: $v_B = \dfrac{v_{0A} \cos\alpha \cdot t_1 - x_{0B}}{t_1}$

con lo que para determinar v_B *necesitamos saber t_1 o instante en que el balón llega a ser recogido por B (justo antes de llegar a suelo).*

Como en el instante en que el balón es recogido por B, su ordenada "y" vale (casi) 0, podemos igualar a cero la expresión general de dicha ordenada y despejar t_1, con lo que:

$v_{0A} \operatorname{sen}\alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$ de donde obtenemos que $t_1 = \dfrac{2 v_{0A} \operatorname{sen}\alpha}{g}$ y sustituyendo este valor en la expresión de v_B anterior nos queda finalmente:

$$v_B = v_{0A} \cos\alpha - \frac{x_{0B} \cdot g}{2 v_{0A} sen\alpha}$$

La expresión obtenida sirve para calcular, en las condiciones que se dan en el enunciado del problema, qué velocidad constante deberá llevar el jugador del equipo contrario para recoger la pelota inmediatamente antes de que impacte con el suelo.

Analizad el resultado obtenido. Reflexionad, en particular, sobre el significado de que v_B pueda ser negativa, nula o positiva

En primer lugar, podemos darnos cuenta de que la ecuación es dimensionalmente homogénea y que en ambos lados del signo igual tenemos L/T. Vemos que también se cumplen las hipótesis de partida anteriormente enunciadas.

En segundo lugar, como el resultado es una resta de dos términos, si se obtiene un número negativo implica que la única componente escalar del vector $\vec{v}_B$ es negativa y por tanto el jugador se mueve hacia la izquierda porque el alcance del balón será inferior a la distancia inicial que separa a los dos jugadores.

Si la resta es 0, quiere decir que el jugador receptor no se mueve porque el balón va a caer justo donde él se encuentra. En esta situación podemos comprobar, por ejemplo, que la posición del balón en el momento de la recepción (igual aquí a la posición fija del receptor, x_{0B}) ha de coincidir con la expresión conocida del alcance horizontal de un tiro oblicuo. En efecto, en ese caso particular, tenemos:

$$v_B = 0 \rightarrow v_{0A}\cos\alpha = \frac{x_{0B}\cdot g}{2v_{0A}sen\alpha} \rightarrow x_{0B} = \frac{2\cdot v_{0A}^2\cdot sen\alpha\cdot\cos\alpha}{g}$$

La expresión coincide con la expresión general para el alcance para cualquier tiro oblicuo.

Finalmente, si la resta es positiva, quiere decir que el jugador se dirige hacia la derecha, porque el alcance del balón es superior a la distancia que le separa del punto de lanzamiento.

Sustituyendo los datos numéricos, podremos saber en cuál de los tres casos nos encontramos:

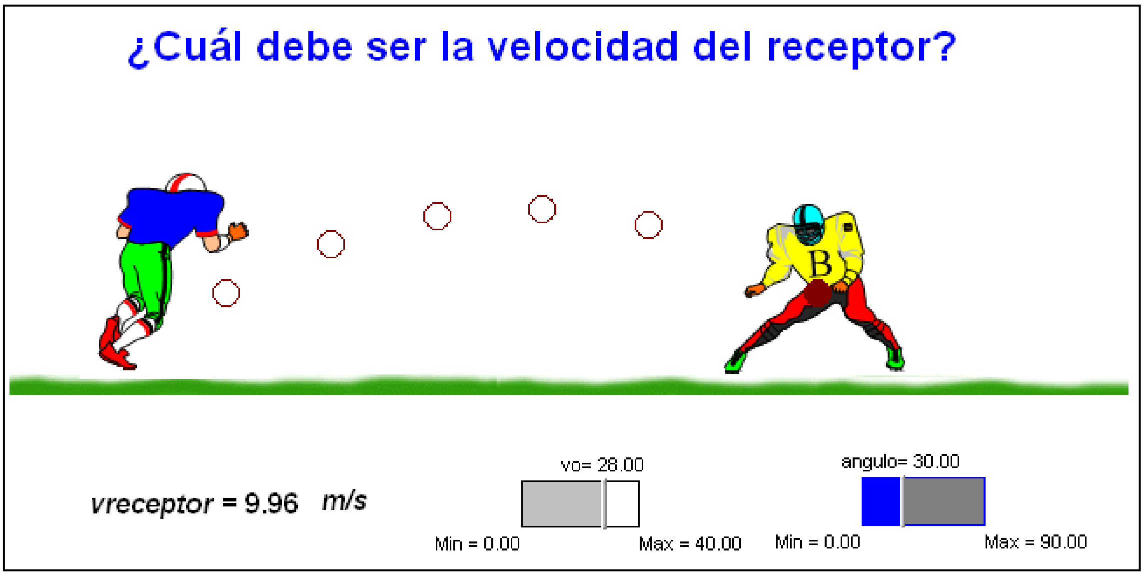
$$v_B = v_{0A}\cos\alpha - \frac{x_{0B}\cdot g}{2v_{0A}\,\mathrm{sen}\,\alpha} = 28\cos 30° - \frac{40\cdot 10}{2\cdot 28\cdot sen30°} = 9'96 \text{ m/s}$$

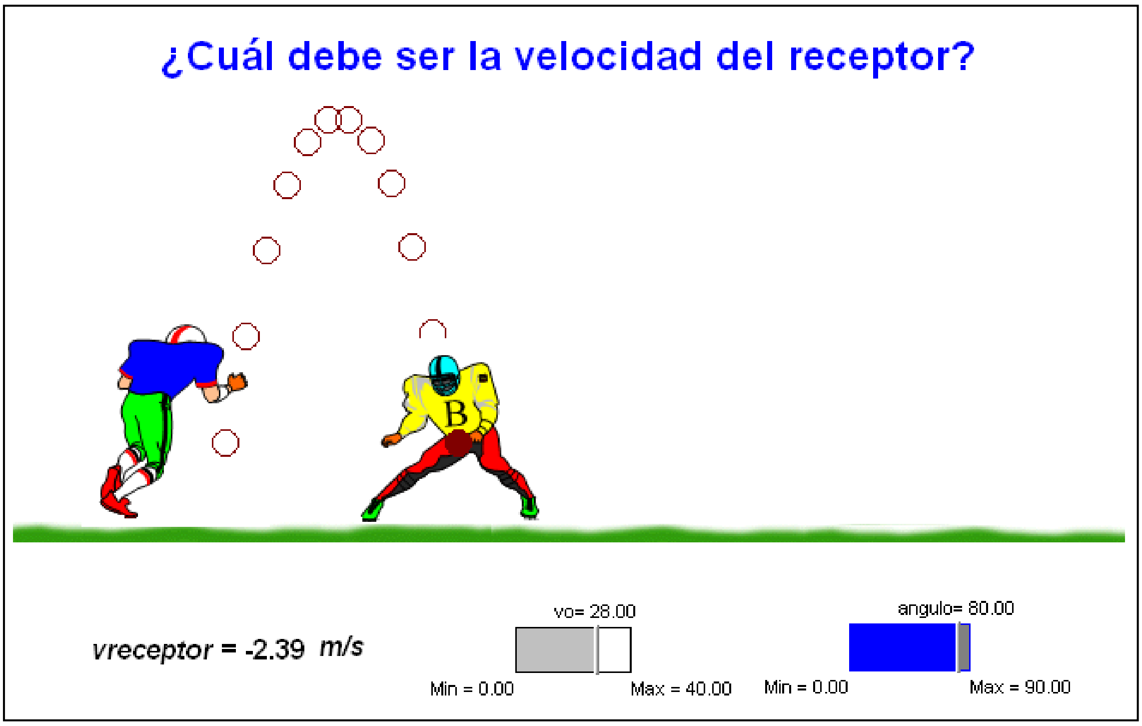
Por tanto, el balón sobrepasará al jugador contrario y éste debería correr hacia la derecha con $\vec{v}_B = (9'96{,}0)$ m/s para alcanzarlo en el momento en que llegue al suelo.

Refuerzo

Los alumnos pueden trabajar sobre este problema con una animación *Modellus*, que hemos elaborado. La animación incluye dos cursores manuales para modificar las condiciones iniciales del movimiento del balón (velocidad y ángulo de lanzamiento) y el balón deja en su movimiento una huella estroboscópica. Las dos imágenes siguientes corresponden al instante final (cuando el jugador B recibe el balón), en dos casos particulares. El que hemos resuelto aquí, y otro en el que A realiza el lanzamiento con un ángulo mucho mayor, cercano a 90º (exactamente 80º) y ello obliga al jugador B a moverse en sentido contrario para recibirlo.

La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm




¿Cuál debe ser la velocidad del receptor?
B
vreceptor = -2.39 m/s
vo= 28.00
Min = 0.00
Max = 40.00
angulo= 80.00
Min = 0.00
Max = 90.00